KELEY
IBRARY
NIVERSITY OF
CALIFO

THE LIBRARY
OF
THE UNIVERSITY
OF CALIFORNIA

GIFT OF

Prof. G. C. Evans

MATH-
STAT.
LIBRARY

G. C. Evans.

MATH
STAT.
LIBRARY

LEÇONS
D'ANALYSE FONCTIONNELLE

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie.

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL

Leçons sur la théorie des fonctions (*Éléments et principes de la théorie des ensembles*), par EMILE BOREL; 2e édition, 1914..... 15 fr.

Leçons sur les fonctions entières, par EMILE BOREL; 2e éd., 1921. *Sous presse.*

Leçons sur les séries divergentes, par EMILE BOREL; 1901..... 9 fr.

Leçons sur les séries à termes positifs, par EMILE BOREL, rédigées par *R. d'Adhémar;* 1902..... 7 fr.

Leçons sur les fonctions méromorphes, par EMILE BOREL, rédigées par *Ludovic Zoretti;* 1903..... 7 fr.

Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, par HENRI LEBESGUE; 1904..... 7 fr.

Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes, par E. BOREL, rédigées par *M. Fréchet,* avec des Notes de P. PAINLEVÉ et de H. LEBESGUE; 1905..... 9 fr.

Leçons sur les fonctions discontinues, par RENÉ BAIRE, rédigées par *A. Denjoy;* 1905..... 7 fr.

Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, par ERNST LINDELÖF; 1905..... 7 fr.

Leçons sur les séries trigonométriques, par H. LEBESGUE; 1906... 7 fr.

Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre, par PIERRE BOUTROUX, avec une Note de PAUL PAINLEVÉ; 1908..... 13 fr.

Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini, par OTTO BLUMENTHAL; 1910..... 11 fr.

Leçons sur la théorie de la croissance, par EMILE BOREL, rédigées par *A. Denjoy;* 1910..... 11 fr.

Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe, par PAUL MONTEL; 1910..... 7 fr.

Leçons sur le prolongement analytique, par L. ZORETTI; 1910.... 7 fr. 50

Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles, par VITO VOLTERRA, rédigées par *M. Tomassetti* et *F.-S. Zarlatti;* 1912..... 11 fr.

Leçons sur les singularités des fonctions analytiques, par P. DIENES; 1913..... 11 fr.

Leçons sur les fonctions de lignes et leurs applications, par VITO VOLTERRA, rédigées par *J. Pérès;* 1913..... 15 fr.

Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, par FRÉDÉRIC RIESZ; 1913..... 13 fr.

Leçons sur les méthodes de Sturm dans la théorie des équations différentielles linéaires et leurs développements modernes, par MAXIME BÔCHER, rédigées par *Gaston Julia;* 1917..... 10 fr.

Intégrales de Lebesgue; fonctions d'ensembles; classes de Baire, par C. DE LA VALLÉE POUSSIN; 1916..... 14 fr.

Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe, par EMILE BOREL, rédigées par *Gaston Julia;* 1917..... 15 fr.

Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, par C. DE LA VALLÉE POUSSIN; 1919..... 16 fr.

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL

LEÇONS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

PROFESSÉES AU COLLÈGE DE FRANCE

PAR

PAUL LÉVY
PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

AVEC UNE PRÉFACE
DE
M. J. HADAMARD
MEMBRE DE L'INSTITUT

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
55, Quai des Grands-Augustins, 55

1922

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés
pour tous pays.

QA320
L43
MATH/
STAT.

PRÉFACE DE M. HADAMARD.

La tâche de signaler à l'attention du lecteur le Calcul fonctionnel aurait pu sembler importante il y a un quart de siècle; elle est bien simplifiée aujourd'hui.

Logiquement parlant, le calcul fonctionnel aurait dû se constituer dès la naissance même de la notion d'intégrale définie ou, plus exactement, lorsque avec cette notion fut élaborée celle même de fonction au sens de Dirichlet, la fonction étant considérée comme définie non par telle ou telle série d'opérations analytiques, mais par la connaissance de toutes ses valeurs; l'intégrale définie fait précisément intervenir l'ensemble de ces valeurs et par là constituait un premier fait de Calcul fonctionnel. On n'aperçut point cependant qu'il y avait là, et dans le Calcul des Variations qui apparut bientôt après, une branche nouvelle de la Science. Il était réservé à M. Pincherle et surtout à M. Volterra d'en dégager l'individualité et d'en montrer l'importance. Cette importance, il n'est plus permis à un mathématicien de l'ignorer, depuis les Mémoires de M. Volterra sur les fonctions de lignes et les Leçons que l'illustre géomètre a professées à l'Université de Paris sur le même sujet.

Mais un autre fait a tout particulièrement contribué à rendre naturelle et familière à tous les géomètres la discipline d'esprit dont nous parlons : je veux parler de la théorie du problème de Dirichlet et des vues nouvelles que nous a ouvertes sur ce sujet la découverte de M. Fredholm. Celle-ci nous a appris que même dans l'étude d'une équation aux

dérivées partielles il peut être essentiel de considérer les relations d'une des valeurs de la fonction inconnue non seulement avec les valeurs infiniment voisines, mais encore avec toutes celles que cette inconnue peut prendre dans son domaine entier d'existence. En un mot, il est aujourd'hui impossible de traiter la théorie des équations aux dérivées partielles sans la rattacher au Calcul fonctionnel.

S'il est devenu inutile d'insister sur le sujet du Volume qu'on va lire, est-il nécessaire d'en présenter au public l'auteur? A peine davantage. On sait par quels remarquables débuts M. Paul Lévy s'est signalé au monde scientifique. On sait comment, à côté de la généralisation de la notion de différentielle totale, telle qu'elle résulte des recherches de M. Volterra, il a pareillement étendu au nouveau domaine la notion d'équation aux différentielles totales complètement intégrable et comment cette nouvelle généralisation a jeté sur toute la théorie la plus vive et la plus féconde lumière.

Pendant cinq ans, M. Lévy a donné à la Patrie une activité qui aurait été précieuse pour la Science. A celle-ci, il s'est de nouveau consacré tout entier. En même temps que l'œuvre de M. Volterra et la sienne propre, il en continue une autre qui s'annonçait admirable : celle de R. Gateaux, tué à l'ennemi en septembre 1914, et dont l'œuvre si vite et si brutalement interrompue, avait ouvert au Calcul fonctionnel la voie nouvelle de l'intégration.

Le lecteur verra à quel degré de clarté et d'harmonie cette théorie élevée a été amenée par les efforts de pareils savants. Nul doute, et c'est l'essentiel, qu'il n'y trouve également l'occasion d'applications importantes et de progrès nouveaux.

J. HADAMARD.

LEÇONS
D'ANALYSE FONCTIONNELLE

PREMIÈRE PARTIE.
LES FONDEMENTS DU CALCUL FONCTIONNEL.

CHAPITRE I.
L'ORIGINE ET LES PRINCIPES DU CALCUL FONCTIONNEL.

SOMMAIRE. — L'origine de la notion de fonction. — L'origine de la notion de fonctionnelle. — Les débuts du calcul fonctionnel. — Algèbre fonctionnelle et analyse fonctionnelle. — Le passage du fini à l'infini. — La représentation des fonctions par une infinité dénombrable de paramètres. — Indication des questions traitées dans ce Livre.

1. L'origine de la notion de fonction. — Le calcul fonctionnel est une branche de l'analyse qui dérive du calcul différentiel et intégral de la même manière que ce calcul lui-même dérive de l'algèbre, par une généralisation progressive des opérations effectuées.

Les premiers mathématiciens ne considéraient que les opérations algébriques les plus simples. Les opérations sur les nombres entiers et les questions arithmétiques tenaient naturellement une grande place dans leurs préoccupations; mais l'étude de la géométrie les obligea de bonne heure à envisager des opérations sur des nombres quelconques. Ce n'est que bien plus tard que, par d'autres applications et le progrès des conceptions théoriques, ils furent conduits à étudier, d'abord les transcendantes élémentaires, puis des catégories

plus générales de fonctions, pour arriver au milieu du XVIIIe siècle à considérer des fonctions continues absolument quelconques.

A quel moment la notion abstraite de fonction s'est-elle dégagée de ces exemples de plus en plus généraux? On la trouve déjà nettement chez Descartes, qui ramena l'étude d'une courbe à celle des variations simultanées de ses coordonnées. Mais c'est Leibniz qui prononça le premier le mot de fonction, pour donner une expression générale aux notions fondamentales du calcul infinitésimal, notions qui avaient déjà été appliquées dans des cas particuliers, non seulement par les géomètres des XVIe et XVIIe siècles, mais déjà par Archimède ([1]).

2. L'origine de la notion de fonctionnelle. — L'intégrale, dont l'étude obligea les mathématiciens à donner une expression à la notion de fonction, est en outre le premier exemple, encore très particulier, d'une notion nouvelle. Tandis que la fonction est une quantité qui dépend d'une ou plusieurs variables suivant une loi déterminée, l'intégrale définie dépend, suivant une loi déterminée, de toutes les valeurs d'une fonction. C'est ce que M. Hadamard appellera plus tard une *fonctionnelle*.

Mais, même si Leibniz a peut-être vu le caractère de cette notion nouvelle, l'idée ne pouvait lui venir d'approfondir ce caractère et d'aborder l'étude générale des opérations fonctionnelles. Cette étude ne pourra être envisagée que quand la théorie des fonctions, qui en est le support nécessaire, sera suffisamment développée, et quand, de plus, on connaîtra un plus grand nombre d'exemples particuliers de fonctionnelles.

Laissant de côté la dérivée, qui est bien une fonctionnelle, mais d'une nature tellement spéciale, ne dépendant que des valeurs de la fonction dans le voisinage d'une valeur particulière de la variable, qu'elle pouvait difficilement donner naissance à la notion générale de fonctionnelle, nous pouvons dire que le deuxième exemple est donné par le calcul des variations. L'intégrale

$$I = \int_a^b f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx$$

est une fonctionnelle dépendant de toutes les valeurs de la fonction y

([1]) *Cf.* VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes* (1913), Chap. I.

dans l'intervalle (a, b), et constitue un exemple plus général que celui de l'intégrale de la fonction y. Elle fut considérée dans un cas particulier par Bernoulli, puis dans le cas général par Euler [1], et c'est à son sujet que Lagrange introduisit la notion de *variation*, qui est pour l'intégrale précédente ce qu'est la différentielle pour une fonction, et qui suffira, non seulement pour l'étude d'intégrales de formes plus générales, mais pour l'étude des fonctionnelles en général.

Dès le début du XIXe siècle, l'étude des phénomènes physiques introduit des fonctionnelles très différentes de celles considérées par Lagrange, et dont la définition analytique est beaucoup moins simple : telles sont la capacité électrique du conducteur isolé limité à une surface donnée, ou l'aire de la surface minima limitée à un contour donné. L'étude de ces fonctionnelles devait au début du siècle actuel constituer un nouveau et important chapitre du calcul des variations.

3. **Les débuts du calcul fonctionnel.** — Le calcul des variations n'est qu'un chapitre du calcul fonctionnel, comme la théorie des maxima et minima n'est qu'un chapitre du calcul différentiel.

On peut, d'une manière précise, dire que c'est en 1887 que le calcul fonctionnel prit naissance, lorsque M. V. Volterra commença à publier dans les *Rendiconti de la R. Accademia dei Lincei* une série de Notes, rapidement devenues célèbres, sur ce sujet.

Il commença, dégageant la notion générale de fonctionnelle des exemples particuliers qui avaient déjà été envisagés, à considérer *une quantité qui dépend de toutes les valeurs d'une autre fonction*, quantité à laquelle nous donnerons avec M. J. Hadamard le nom de *fonctionnelle*. Comme une fonction peut être représentée par une ligne, la notion de fonctionnelle est presque identique à celle de *fonction d'une ligne*. C'est cette dernière expression que M. Volterra emploie de préférence, même lorsqu'il envisage l'aspect analytique du problème.

Généralisant la notion de variation de Lagrange, M. Volterra montre que la *forme de variation* considérée par Lagrange s'applique à une catégorie très générale de fonctionnelles ; mais la *notion de variation* est plus générale encore, et les fonctionnelles admettant

---

[1] J. HADAMARD, *Leçons sur le Calcul des variations*, p. 38.

une variation ont dans l'ensemble des fonctionnelles la même importance que les fonctions admettant une différentielle dans l'ensemble des fonctions.

M. Volterra définit ensuite les dérivées d'ordres supérieurs, qui permettront d'introduire la notion de variations d'ordres supérieurs, et forme une série analogue à celle de Taylor.

La suite des travaux de l'éminent analyste montre de plus en plus que le calcul fonctionnel est une extension de l'analyse ordinaire, et qu'à chaque chapitre de l'analyse ordinaire correspond un chapitre du calcul fonctionnel qui est souvent plus qu'une généralisation du précédent, par les circonstances qu'il présente et les horizons nouveaux qu'il découvre. Dès lors, la théorie se développe rapidement, tant par les travaux propres de M. Volterra, que par ceux des nombreux géomètres qui ont compris dès le début l'importance du nouveau domaine que celui-ci venait d'ouvrir à la Science.

4. **Algèbre fonctionnelle et analyse fonctionnelle.** — Ces travaux peuvent se grouper en deux chapitres distincts, que nous appellerons l'*algèbre fonctionnelle* et l'*analyse fonctionnelle*. La première partie comprendra des problèmes où les inconnues sont des fonctions ordinaires, mais qui se rattachent au calcul fonctionnel par les méthodes employées pour les résoudre. L'analyse fonctionnelle, au contraire, comprend des problèmes où les inconnues sont des fonctionnelles, ou d'une manière générale des problèmes que l'on ne peut concevoir indépendamment de la notion de fonctionnelle.

Il était naturel que le développement de l'algèbre fonctionnelle précédât celui de l'analyse fonctionnelle. Avant d'étudier en eux-mêmes les nouveaux problèmes que pose l'introduction de la notion abstraite de fonctionnelle, les mathématiciens ont dû se persuader de l'intérêt de cette notion, en constatant que le fait de considérer comme variables les fonctions figurant dans divers types d'équations fonctionnelles donne des procédés nouveaux et féconds pour résoudre ces équations. En effet, les travaux relatifs aux équations intégrales ou intégro-différentielles, qui constituent peut-être la plus belle conquête des mathématiciens depuis le début de ce siècle, se rattachent à ce que nous venons d'appeler l'algèbre fonctionnelle. S'il est possible d'exposer ces travaux sans mettre en évidence le rôle joué par la notion de fonctionnelle (et cela n'a rien d'étonnant puisque les

problèmes traités sont des problèmes de la théorie des fonctions ordinaires), ce serait se priver du fil directeur qui a permis à M. Volterra d'obtenir ses plus beaux résultats, comme il l'a montré dans ses leçons professées à la Sorbonne en 1912 (1).

Après ces leçons de M. Volterra, le moment semble venu d'esquisser un exposé d'ensemble de l'analyse fonctionnelle, dont l'objet essentiel est l'étude des équations aux dérivées fonctionnelles, généralisation des équations différentielles et aux dérivées partielles. Plus abstraite par son objet même, cette étude ne peut d'abord être féconde en résultats applicables à la théorie des fonctions. C'est un champ de recherches différent, plus large à certains points de vue, riche en problèmes nouveaux, en notions nouvelles. Sans doute lorsqu'il sera exploré, pourra-t-on en déduire de nouvelles méthodes applicables aux problèmes d'analyse ordinaire; on ne saurait les préciser dès maintenant. Il est souvent arrivé dans l'histoire des sciences qu'une théorie ait des applications que ses auteurs ne prévoyaient pas, et le fait que l'analyse fonctionnelle ne se soit pas encore révélée féconde en applications pratiques ne doit pas détourner de l'étude de cette science, si attrayante d'ailleurs, au point de vue logique et philosophique, comme généralisation de l'analyse ordinaire.

5. **Le passage du fini à l'infini.** — Des progrès si rapides que l'ont été ceux du calcul fonctionnel n'auraient sans doute pas été possibles si l'étude de chaque chapitre du calcul fonctionnel n'était facilitée par la connaissance du chapitre correspondant de l'analyse ordinaire, et si le procédé qui permet de passer de celui-ci à celui-là n'était pas toujours le même : *le passage du fini à l'infini.* C'est encore M. Volterra qui a mis en évidence le parti à tirer de l'utilisation systématique de ce procédé.

---

(1) De même, en analyse ordinaire, on peut distinguer l'algèbre, traitant de problèmes où les inconnues sont des nombres, et l'analyse, traitant de problèmes où les inconnues sont des fonctions. Ainsi, la résolution de l'équation

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

par la formule

$$x = b_1 y + b_2 y^2 + \ldots + b_n y^n + \ldots$$

est un résultat d'algèbre en ce sens que l'inconnue x est un nombre; mais le fait de considérer ce nombre comme variable donne au raisonnement mathématique une puissance nouvelle, et souvent l'analyse, qui emploie ces procédés, et considère x comme *fonction implicite* de y, réussit là où l'algèbre pure échoue.

Une fonction continue $x(t)$ définie dans un intervalle $(0, 1)$ est connue d'une manière approchée si, cet intervalle étant divisé en un nombre très grand n d'intervalles égaux, on connaît les valeurs moyennes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la fonction dans chaque intervalle. Une fonctionnelle dépendant de $x(t)$ est alors représentée d'une manière approchée par une fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. L'étude des problèmes concernant les fonctionnelles résultera ainsi de l'étude des problèmes analogues concernant la fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Il suffit de supposer que n devienne infini pour être conduit à la solution du problème considéré de calcul fonctionnel, et si souvent le procédé employé ne conduit pas à démontrer l'exactitude de la solution, qu'il faut vérifier autrement, il n'en constitue pas moins un procédé de découverte d'une fécondité remarquable.

C'est ainsi que s'est formée, pour prendre l'exemple le plus simple, la notion d'intégrale. La somme

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

devient infinie si n augmente indéfiniment, mais la moyenne de ces n nombres tend vers une limite qui, l'intervalle considéré étant égal à l'unité, est l'intégrale de la fonction $x(t)$ dans cet intervalle. On voit que l'intégrale généralise la notion de moyenne plutôt que celle de somme, remarque que nous aurons à utiliser dans la suite, et si l'intervalle d'intégration est divisé en intervalles qui ne sont pas égaux, il est tout naturel de donner à chacun des x_i un poids égal à l'intervalle correspondant. Si l'intervalle total n'est pas égal à 1, la limite de la moyenne sera naturellement, non l'intégrale, mais son quotient par cet intervalle.

Le même procédé de passage du fini à l'infini s'applique à la différentielle totale

$$df(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

et à la limite on est conduit à penser que la variation d'une fonctionnelle U dépendant d'une fonction $x(t)$ définie entre 0 et 1, sera une expression de la forme

$$\delta U = \int_0^1 \varphi(t)\, \delta x(t)\, dt.$$

C'est la variation considérée par Lagrange et M. Volterra, qui s'applique en effet à une catégorie fort étendue de fonctionnelles.

6. La représentation des fonctions par une infinité dénombrable de paramètres. — Nous ne donnerons pas pour le moment d'autres exemples d'application du procédé considéré. Le lecteur en trouvera suffisamment dans la suite. Mais faisons à ce sujet une remarque importante.

On peut envisager d'autres manières de considérer une fonctionnelle comme limite d'une fonction d'un grand nombre de variables. La fonction $x(t)$ peut être définie dans l'intervalle considéré par la suite des coefficients de son développement en série trigonométrique ou d'une manière plus générale en série de fonctions orthogonales, ou bien si elle est analytique par les coefficients de son développement en série de Taylor. Une fonction des n premiers coefficients d'un de ces développements conduit, lorsque n augmente indéfiniment, à une fonctionnelle.

Cette manière d'envisager le passage du fini à l'infini présente-t-elle le même intérêt que celle que nous avons indiquée d'abord ?

On ne saurait trop nettement répondre : non.

Il ne faut pas en effet perdre de vue que, quel que soit le procédé employé pour représenter une fonction $x(t)$, la fonction est avant tout une succession de valeurs prises par la quantité x lorsque t varie. C'est cette succession de valeurs qu'il faut toujours considérer si l'on veut ne pas perdre de vue l'origine de la notion de fonction et ne pas se contenter d'écrire des relations formelles sans en pénétrer le sens.

Aucun professeur ne proposerait de donner à un débutant, comme *définition* de l'intégrale indéfinie, cette propriété que la fonction

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

a pour intégrale la fonction

$$c + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n} + \ldots,$$

c étant une constante quelconque. Une telle définition ne permettrait pas de saisir l'origine même de la notion d'intégrale ni d'aborder avec succès les applications du calcul intégral aux problèmes physiques.

Par contre, on ne peut songer à nier les services que rend, une fois la notion d'intégrale devenue familière, l'intégration des séries trigonométriques ou des séries de puissances.

Nous devons, en abordant le calcul fonctionnel, nous inspirer de

cette double remarque. A chaque problème nouveau, nous examinerons d'abord ce que donne le passage du fini à l'infini appliqué comme nous l'avons dit n° 4, Il nous arrivera d'utiliser ensuite la représentation d'une fonction par une suite dénombrable de coefficients; en particulier, nous considérerons souvent la représentation d'une fonction par une série de fonctions orthogonales. Mais cela ne doit pas faire oublier que le point de vue indiqué d'abord, qui est celui de M. Volterra, doit rester au premier plan ([1]).

7. Indication des questions traitées dans ce Livre. — Nous pouvons maintenant indiquer brièvement les principales questions que nous étudierons dans la suite.

Nous avons déjà dit qu'un traité de calcul fonctionnel pourrait comprendre un chapitre correspondant à chaque chapitre de la théorie des fonctions d'un nombre fini de variables. Notre objet principal sera de généraliser les notions élémentaires du calcul différentiel, la théorie des équations aux dérivées partielles, et la notion d'intégrale multiple.

Dans la première Partie, nous parlerons d'abord de la continuité dans le domaine fonctionnel. Nous étudierons ensuite la variation première et les variations d'ordres supérieurs des fonctionnelles, études liées à celles des fonctionnelles linéaires et des fonctionnelles entières d'ordre fini, comme l'étude des différentielles des divers ordres des fonctions de n variables est liée à l'étude des formes de divers degrés.

La notion de déterminant fonctionnel est fondamentale dans la théorie des fonctions de n variables, et l'on ne peut en aborder l'étude sans connaître au préalable la théorie des équations algébriques. Nous serons de même obligés de donner quelques indications sur la théorie des équations intégrales linéaires; mais nous nous bornerons sur ce sujet à quelques considérations générales et aux résultats indispensables pour la suite. Nous pourrons ensuite traiter la question des fonctionnelles définies par des équations implicites.

([1]) Signalons à ce sujet les travaux de M. Bourlet (*Annales de l'École Normale*, t. XIV et XVI), qui aurait pu partager avec M. Volterra l'honneur d'avoir fondé le calcul fonctionnel, s'il ne s'était placé uniquement au second point de vue. M. Pincherle, dans les *Math. Ann.*, t. XLIX, a également publié avant les travaux de M. Volterra, des travaux où il se place au même point de vue.

Dans la deuxième Partie, nous étudierons les équations aux dérivées fonctionnelles du premier ordre. Il existe de nombreux types intéressants à considérer. Le plus simple est celui qui résulte de la généralisation des équations aux différentielles totales, et qui se rapproche des équations différentielles ordinaires du premier ordre en ce sens que l'intégrale ne dépend que d'un paramètre, mais qui s'en distingue en ce sens que la différentielle totale considérée peut n'être pas une différentielle exacte, et qu'il y a lieu d'étudier le problème de l'intégrabilité.

Nous étudierons ensuite un autre type d'équations, que nous nommerons équations aux dérivées fonctionnelles partielles, qui généralise les équations aux dérivées partielles comme le précédent généralise les équations différentielles. Nous étendrons à ces équations les notions de caractéristiques, d'intégrales complètes et la méthode d'intégration de Cauchy.

La troisième Partie comprendra l'étude des équations aux dérivées fonctionnelles partielles du second ordre, et notamment d'une équation généralisant celle de Laplace. Cette étude introduisant une formule qui généralise celle de Green, il est nécessaire de généraliser d'abord la notion d'intégrale, ou plus exactement celle de moyenne. Cette généralisation a été obtenue pour la première fois par Gateaux, en 1914 (voir *Bull. Soc. math.*, 1919). Tandis que jusqu'ici l'analyse fonctionnelle présentait avec l'analyse ordinaire une analogie remarquable, la théorie de la moyenne en calcul fonctionnel est quelque chose d'essentiellement nouveau, ne ressemblant à aucune théorie de l'analyse ordinaire. L'étude de cette notion comprendra cinq chapitres de la troisième Partie, un seul étant consacré à l'application à l'équation de Laplace.

Dans le résumé qui précède, les questions concernant la théorie pure sont seules indiquées.

Comme applications, nous considérerons surtout des fonctionnelles liées au problème de Dirichlet relatif à l'équation de Laplace de l'analyse ordinaire.

Le développement de ces diverses théories oblige à utiliser un très grand nombre de notions de l'analyse ordinaire. Pour ne pas exiger du lecteur un trop grand nombre de connaissanees préalables, j'ai préféré allonger un peu l'exposé en rappelant sommairement les

fondements de quelques théories classiques de l'analyse. C'est ainsi que l'on trouvera des indications sur l'intégration au sens de M. Lebesgue, sur les séries de fonctions orthogonales, sur les propriétés élémentaires des fonctions de Green. Toutefois, dans les quatre derniers chapitres de la dernière Partie, contenant l'exposé de résultats récents et sans doute non encore complètement au point [1], j'ai dû renoncer à donner à l'exposé le caractère élémentaire que j'aurais voulu conserver.

D'autre part, je tiens à prévenir le lecteur que je n'ai pas voulu faire un traité complet de calcul fonctionnel. Un tel traité devrait comporter un exposé développé de la théorie des équations intégrales linéaires, de la question connexe des formes quadratiques à une infinité de variables, et d'une manière générale de la théorie des fonctions d'une infinité de variables, questions sur lesquelles nous ne donnerons que de brèves indications. Il devrait aussi comprendre la généralisation de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire et l'étude des équations intégro-différentielles, qui constituent deux beaux chapitres de l'œuvre de M. Volterra; ce dernier surtout, le plus récent, est rapidement devenu classique et a donné lieu à un grand nombre de travaux d'autres savants, et il se rattache naturellement à la notion de fonctionnelle. Mais ces questions nous écarteraient de notre objet, qui est surtout l'étude des équations aux dérivées fonctionnelles, et je ne peux que renvoyer le lecteur aux Mémoires et Ouvrages où elles sont exposées [2].

---

[1] Peut-être le lecteur trouvera-t-il que j'aurais dû, pour publier cet Ouvrage, attendre que cette troisième Partie soit complètement au point. Il aurait fallu sans doute attendre plusieurs mois, peut-être plusieurs années. Dans l'intérêt de la Science française, il m'a paru préférable de publier dès maintenant les résultats acquis, et de ne pas hésiter à en énoncer d'autres, plus ou moins vraisemblables, que je n'ai pu démontrer rigoureusement; ces questions dont l'étude me paraît mériter d'être poursuivie sont rappelées à la fin du dernier chapitre. Je serai heureux de contribuer ainsi à attirer de nouveaux chercheurs dans ce domaine si vaste et encore si peu connu qu'est le calcul fonctionnel.

[2] VOLTERRA, *Sur une généralisation de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire* (*Acta matematica*, t. XII); *Leçons sur les fonctions de lignes* (Gauthier-Villars, 1913); *Trois conférences sur la généralisation des fonctions analytiques et sur la théorie des vagues* (*The Rice Institute; Book of the opening*, vol. III, p. 1036-1100).

CHAPITRE II.

LA NOTION DE CONTINUITÉ DANS LE DOMAINE FONCTIONNEL.

SOMMAIRE. — Notations. — L'espace fonctionnel. — Définition normale de la continuité et du voisinage. — Autres définitions. — Voisinages de divers ordres. — Champs fonctionnels. — Continuité uniforme. — Fonctionnelles dépendant d'un paramètre.

8. **Notations.** — Lorsqu'une quantité U est une *fonctionnelle* de $x(t)$, dépendant des valeurs prises par cette fonction pour $a \leqq t \leqq b$, M. Volterra représente cette dépendance par le symbole

$$\mathrm{U}\,|\,[x(\overset{b}{\underset{a}{t}})]\,|.$$

Pour simplifier l'écriture, toutes les fois que cela pourra se faire sans ambiguïté, nous supprimerons l'indication des limites a et b, ou même nous écrirons simplement $\mathrm{U}\,|\,[x]\,|$ ou même U, sans rappeler par les notations que cette quantité est une fonctionnelle de $x(t)$.

Si une quantité dépend de la forme de plusieurs fonctions, soit par exemple deux fonctions x et y, et de la valeur de certains paramètres, soit par exemple deux paramètres λ et μ, la notation $\mathrm{U}\,|\,[x, y, \lambda, \mu]\,|$ ne marquerait pas suffisamment la distinction entre les fonctions et les paramètres. Nous adopterons dans ce cas l'une des notations

$$\mathrm{U}_{\lambda,\mu}\,|\,[x, y]\,|; \quad \mathrm{U}\,|\,[x, y\,|\,\lambda, \mu]\,|.$$

La notation de M. Volterra

$$\mathrm{U}\,|\,[x(\overset{b}{\underset{a}{t}}), y(\overset{b}{\underset{a}{t}}); \lambda, \mu]\,|$$

supprime également toute ambiguïté.

Si dans ces expressions on remplace x par une fonction de t et de

paramètres α, β, la fonctionnelle U devient une fonction de α, β, λ, μ. Nous distinguerons le rôle de la variable t de celui des paramètres α et β en écrivant

$$U\,|\,[x(t\,|\,\alpha, \beta)\,|\,\lambda, \mu]\,| \quad \text{ou} \quad U_{\lambda,\mu}\,|\,[x_{\alpha,\beta}(t)]\,|.$$

Les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ et les variables λ et μ qui interviennent dans la définition de U seront appelées *arguments* de cette fonctionnelle.

9. **L'espace fonctionnel.** — On sait les services que rend dans l'étude des fonctions de n variables le langage géométrique qui consiste à les considérer comme fonctions *d'un point de l'espace à n dimensions*. Un langage analogue est de même employé avec avantage pour les fonctions d'une infinité dénombrable de variables, qu'il nous arrivera d'avoir à considérer dans la suite, et pour les fonctionnelles qui sont l'objet principal de notre étude.

Pour fixer les idées, nous considérerons les fonctionnelles U dépendant des valeurs prises, pour $0 \leqq t \leqq 1$, par une fonction $x(t)$ définie d'une manière uniforme dans cet intervalle. Nous considérerons une telle fonction comme représentée par un *point* d'un espace idéal que nous appellerons l'*espace fonctionnel*. La fonctionnelle U sera une fonction d'un point de cet espace.

Mais un mot nouveau, s'il peut faciliter la généralisation de certains raisonnements, ne suffit pas pour résoudre une difficulté. L'espace fonctionnel diffère essentiellement de l'espace à n dimensions, comme nous allons bientôt le constater.

10. **Définition normale de la continuité et du voisinage** [1]. — La notion qui est à la base de toute méthode infinitésimale est celle de continuité. Dans l'espace à n dimensions, une fonction est dite *continue* en un point A si, étant donné un nombre ε positif, les valeurs prises par cette fonction en A et un autre point B diffèrent de moins de ε, pourvu que B soit *suffisamment voisin* de A, c'est-à-dire pourvu que la *distance* de ces points soit inférieure à un nombre

[1] M. Fréchet emploie le mot *voisinage* dans un sens un peu différent de celui que nous allons lui donner. Nous sommes d'accord pour l'emploi de ce mot avec M. Hadamard (*Leçons sur le Calcul des variations*, p. 48).

convenablement choisi, qui est dit *module de continuité* correspondant à ε.

Nous pouvons étendre cette définition à l'espace fonctionnel. Mais il faut préciser dans quel cas nous avons le droit de considérer deux points A et B comme *voisins*. Ce sera sans doute quand leur *distance* sera très petite. Mais comment définir cette distance, que nous appellerons aussi distance des fonctions correspondantes $x(t)$ et $y(t)$?

Voyons ce que donne le procédé du passage du fini à l'infini. Dans l'espace à n dimensions, les points A et B ayant respectivement pour coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$, leur distance R est définie par la formule

$$R^2 = (y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2.$$

Pour rendre possible le passage à la limite, il faut remplacer la somme qui figure au second membre par la moyenne des termes écrits et, par suite, chercher la limite, non de R, mais de $r = \frac{R}{\sqrt{n}}$. On est ainsi conduit à appeler *distance des fonctions* $x(t)$ et $y(t)$, ou des points correspondants A et B de l'espace fonctionnel, la quantité r définie par la formule

$$(1) \qquad r^2 = \int_0^1 [y(t) - x(t)]^2 \, dt.$$

C'est cette définition que nous adopterons en principe dans la suite. C'est elle qui nous permettra de construire une géométrie de l'espace fonctionnel dans laquelle se généralisent avec leurs caractères essentiels les notions de sphère, d'angle, de courbure des surfaces, de surface minima, de fonction harmonique, etc. Au point de vue qui nous occupe actuellement, nous voyons qu'une fonction $y(t)$ devra être considérée comme *infiniment voisine* d'une fonction $x(t)$ si l'intégrale (1) tend vers 0, c'est-à-dire si, suivant l'expression consacrée, $y(t)$ *converge en moyenne* vers $x(t)$. De même, la fonctionnelle U_A du point A sera dite *continue* en A si $U_B - U_A$ tend vers 0 avec r.

11. Autres définitions. — Les définitions précédentes, généralisations naturelles de celles employées dans la géométrie à n dimen-

sions, ne sont pas suffisantes, et nous ne pouvons nous dispenser d'envisager d'autres sortes de continuité.

Dans l'espace à n dimensions, il suffit de limiter supérieurement soit R, soit r, pour que chacune des quantités $|y_1 - x_1|, \ldots, |y_n - x_n|$ soit limitée supérieurement. Dans l'espace fonctionnel, la connaissance d'une limite supérieure de r n'entraîne pas la connaissance d'une limite supérieure de $|y(t) - x(t)|$ pour une valeur particulière de t.

Pour limiter supérieurement cette différence, nous pouvons considérer comme *distance* des fonctions x et y la quantité

$$(2) \qquad M = \max |y(t) - x(t)| \qquad (0 \leqq t \leqq 1).$$

Avec cette définition, la fonction $y(t)$ devra être considérée comme infiniment voisine de $x(t)$ si $y(t)$ tend *uniformément* vers $x(t)$, et à cette nouvelle sorte de voisinage, que nous appellerons *voisinage uniforme*, correspond une nouvelle sorte de continuité. L'intérêt de cette continuité est prouvé par le fait que des fonctionnelles telles que le maximum de $x(t)$ entre 0 et 1, ou bien la valeur de $x(t)$ pour une valeur particulière de t, qui ne sont pas continues au sens du n° 9, sont continues avec cette nouvelle définition; il en est de même d'autres fonctionnelles que nous rencontrerons dans la suite.

Le voisinage uniforme est naturellement *plus restrictif* que le voisinage en moyenne, de sorte que la nouvelle définition de la continuité est *moins restrictive* que l'ancienne, c'est-à-dire est vérifiée par toutes les fonctionnelles continues d'après l'ancienne définition et aussi par d'autres.

Une autre définition possible serait de considérer la fonction $y(t)$ comme voisine de $x(t)$ si $y(t)$ tend vers $x(t)$, mais non uniformément. La fonctionnelle $x(\tau)$, τ étant une valeur particulière de t, et d'autres fonctionnelles dans la définition desquelles τ joue un rôle particulier, sont continues avec cette définition, plus restrictive que la précédente. Malgré cela, elle ne nous paraît pas intéressante à considérer; cela tient à ce que, dans ces exemples, ce qui importe, ce n'est pas l'existence de la continuité pour chaque valeur du paramètre τ, mais la manière dont la continuité dépend de τ, le fait, par exemple, de savoir si, en faisant varier τ, on a une famille de fonctionnelles *également continues*.

D'autres définitions possibles du voisinage sont liées à la distance r_p définie par la formule

$$(3) \qquad r_p^p = \int_0^1 |y(t) - x(t)|^p \, dt,$$

p étant un nombre positif quelconque. Si r_p tend vers o, il y a une sorte de voisinage entre $y(t)$ et $x(t)$, que nous pouvons appeler *voisinage en moyenne de degré p*. Il comprend comme cas particulier, pour $p = 2$, le voisinage défini n° 9, et est d'autant plus restrictif que p est plus grand. En effet, si $p < \mathrm{P}$ et si r_{P} est donné, on vérifie sans peine que r_p peut prendre n'importe quelle valeur positive $\leqq r_{\mathrm{P}}$, mais ne peut dépasser r_{P}.

Des différentes sortes de voisinage que nous venons de considérer, nous utiliserons surtout dans la suite celles qui correspondent aux définitions de la distance résultant des formules (1) et (2). Sauf indication contraire, c'est toujours de la première qu'il s'agira.

Nous dirons qu'un domaine est *fini* lorsque la distance de ses points à l'origine est limitée supérieurement. Nous appellerons *module fonctionnel* d'une fonction $x(t)$, et désignerons par $\|x(t)\|$ la distance du point qui la représente à l'origine [point qui représente la fonction $x(t) = 0$]. Ces expressions ont naturellement différentes significations suivant la définition adoptée pour la distance.

12. Voisinages des divers ordres. — Les définitions précédentes de la distance ne sont pas suffisantes. Une fonctionnelle telle que

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 dt$$

n'est pas continue, même avec la plus restrictive des définitions considérées jusqu'ici. Pourtant elle a une sorte de continuité que nous allons préciser, et qu'il faut envisager, si nous ne voulons pas exclure de nos recherches les fonctionnelles du calcul des variations classiques.

Nous dirons que $y(t)$ a avec $x(t)$ un *voisinage uniforme d'ordre p* si $y(t)$ et ses p premières dérivées tendent respectivement d'une manière uniforme vers $x(t)$ et ses p premières dérivées. Il suffit d'ailleurs pour cela, si x et y et leurs $(p-1)$ premières dérivées sont continues, que la dérivée d'ordre p de y tende uniformé-

ment vers la dérivée correspondante de x, et que, pour une valeur particulière de t, y et ses $(p-1)$ premières dérivées tendent respectivement vers x et ses $(p-1)$ premières dérivées.

A cette définition, on peut faire correspondre la distance définie comme la plus grande valeur de

$$\left|\frac{d^i y}{dt^i} - \frac{d^i x}{dt^i}\right| \qquad (0 \leqq t \leqq 1;\ i = 1, 2, \ldots, p),$$

ou bien la quantité

$$a_0 \max |y - x| + a_1 \max \left|\frac{d(y-x)}{dt}\right| + \ldots + a_p \max \left|\frac{d^p(y-x)}{dt^p}\right|,$$

$a_0, a_1, \ldots, a_p$ étant des coefficients positifs. Ces différentes définitions sont équivalentes au point de vue de la définition du voisinage qui en résulte.

Des remarques analogues peuvent être faites au sujet du *voisinage en moyenne d'ordre p*, défini par la condition que y et ses dérivées jusqu'à l'ordre p convergent en moyenne respectivement vers x et ses dérivées jusqu'à l'ordre p ou, ce qui revient au même, par la condition que $\frac{d^p y}{dt^p}$ converge en moyenne vers $\frac{d^p x}{dt^p}$ et que pour une valeur particulière de t, $y(t)$ et ses $p-1$ premières dérivées tendent respectivement vers $x(t)$ et ses $p-1$ premières dérivées.

A ces deux définitions du voisinage d'ordre p, correspondent deux sortes de *continuité d'ordre p*. Une fonctionnelle, dans la définition de laquelle interviennent les dérivées de x jusqu'à l'ordre p, aura, en général, la première de ces continuités, la plus restrictive, et parfois la seconde, comme c'est le cas pour les fonctionnelles du calcul des variations

$$\int_0^1 f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^p x}{dt^p}\right) dt.$$

Les notions de voisinage en moyenne d'ordre p, voisinage uniforme d'ordre p, voisinage en moyenne d'ordre $p+1$, ..., sont *de plus en plus restrictives*. Les continuités correspondantes sont, par suite, *de moins en moins restrictives*.

On peut envisager aussi un voisinage d'ordre infini, et une continuité correspondante. Telle sera la continuité de la fonctionnelle

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(p!)^3} \int_0^1 \left(\frac{d^p x}{dt^p}\right)^2 dt.$$

L'exemple de cette fonctionnelle montre que l'ensemble des fonctionnelles ayant cette sorte de continuité est plus vaste que la réunion de tous les ensembles ayant des continuités d'ordre fini. En effet, pour aucune valeur de p, elle n'a une continuité d'ordre p. Ces sortes de continuités sont liées aux distances définies par exemple par la formule

$$\max|y-x| + \lambda \max\left|\frac{d(y-x)}{dt}\right| + \ldots + \frac{\lambda^p}{p!}\max\left|\frac{d^p(y-x)}{dt^p}\right| + \ldots,$$

λ étant un nombre positif, ou par des formules analogues où les coefficients aient d'autres valeurs.

13. Champs fonctionnels. — Les fonctionnelles que nous venons de considérer ne sont pas définies pour toutes les fonctions $x(t)$, mais seulement pour les fonctions ayant des dérivées jusqu'à l'ordre p ou même des dérivées de tous les ordres. La plupart des fonctionnelles ne sont de même définies que pour les fonctions vérifiant certaines conditions, fonctions dont l'ensemble constitue ce qu'on appelle un *champ fonctionnel*. Tandis que, dans l'espace à n dimensions, les domaines d'existence des fonctions sont définis le plus souvent par des conditions s'exprimant par des égalités ou des inégalités, la définition des champs fonctionnels comprend le plus souvent non seulement des conditions d'égalité ou d'inégalité, mais aussi des conditions relatives au mode de continuité ou à la nature analytique des fonctions.

La notion de champ fonctionnel est liée aux remarques qui précèdent sur les différentes sortes de voisinage. Une définition déterminée du voisinage n'a de sens que dans un certain champ fonctionnel. On ne peut, par exemple, parler de voisinage uniforme d'ordre p entre deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ que si leur différence a une dérivée d'ordre p; cette notion n'est donc intéressante que si ces fonctions appartiennent à un ensemble tel que, entre deux fonctions quelconques de cet ensemble, la distance définie par exemple comme la plus grande des quantités

$$\max|y-x|, \quad \max\left|\frac{d(y-x)}{dt}\right|, \quad \ldots, \quad \max\left|\frac{d^p(y-x)}{dt^p}\right|$$

ait un sens. Il est naturel, de plus, de supposer que la fonction o appartienne à cet ensemble, et l'on voit qu'on est conduit à ne parler

de voisinage d'ordre p que dans le domaine des fonctions admettant des dérivées jusqu'à l'ordre p.

On voit que, d'une manière précise, une définition du voisinage résultant d'une définition déterminée de la distance, est liée à la notion du *champ fonctionnel le plus étendu, comprenant la fonction* o, *et tel que la distance de deux fonctions quelconques de ce champ ait un sens.* Il y a d'ailleurs deux manières de comprendre cette relation, suivant que l'on considère une quantité infinie, mais non indéterminée, comme ayant un sens ou non.

Étant donnée l'importance des définitions de la distance résultant des formules (1) et (2), nous devons nous demander à quels champs fonctionnels elles correspondent.

Pour la distance définie par la formule (2), il n'y a pas de difficulté. Si l'on considère une quantité comme ayant un sens si elle est finie et déterminée, c'est le champ des fonctions bornées; aucune espèce de continuité n'est nécessaire. Si l'on considère une quantité comme ayant un sens si elle est finie ou infinie, mais déterminée, la restriction que les fonctions considérées soient bornées n'est même plus nécessaire. Ces remarques n'empêchent pas, étant donnée l'importance des fonctions continues dans les applications, qu'il y a souvent intérêt à ne considérer que le champ de ces fonctions et à utiliser la définition (2) de la distance.

Pour la distance définie par la formule (1), on ne peut pas considérer des fonctions discontinues quelconques. Mais la continuité n'est pas non plus nécessaire pour que cette formule ait un sens. Si l'on admet que la distance de deux fonctions puisse être infinie, le champ fonctionnel à considérer est celui des fonctions *mesurables;* dans le cas contraire, c'est celui des fonctions *sommables* et de *carrés sommables.*

Nous rappellerons, dans le Chapitre suivant, le sens de ces expressions pour le lecteur qui ne serait pas familiarisé avec les travaux de M. Lebesgue. Faisons d'abord une remarque.

Si une fonctionnelle est définie dans un certain champ, en résulte-t-il qu'on ne puisse pas considérer pour elle d'autre sorte de continuité que celle qui correspond à ce champ? Considérons, par exemple, une fonctionnelle U définie pour toutes les fonctions ayant des dérivées finies jusqu'à l'ordre p, mais n'ayant aucun sens si la dérivée d'ordre p n'existe pas ou devient infinie. Peut-on affirmer,

d'une part, qu'elle n'est pas continue d'ordre $p-1$ (définition de la continuité liée au voisinage *uniforme* d'ordre $p-1$), d'autre part, qu'il n'est pas possible qu'elle soit continue d'ordre $p+1$ sans l'être d'ordre p? Il semble que oui [1], car le fait d'être définie dans le champ que nous venons de considérer indique que la dérivée d'ordre p de $x(t)$ intervient (explicitement ou non) dans sa définition; alors on ne s'expliquerait, ni qu'il suffise que les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ aient leurs dérivées d'ordre $p-1$ très peu différentes, ni qu'il soit nécessaire qu'elles aient leurs dérivées d'ordre $p+1$ très peu différentes, pour que les valeurs correspondantes de U soient très peu différentes. Il serait intéressant de le démontrer rigoureusement, ou bien de donner des exemples d'exception à cette règle.

14. **Continuité uniforme.** — Considérons une définition déterminée de la distance. Une fonctionnelle U sera dite *uniformément continue* dans un certain champ fonctionnel C si, étant donné un nombre positif ε, on peut déterminer un nombre η tel que, si deux fonctions du champ C ont une distance inférieure à η, les valeurs correspondantes de U diffèrent de moins de ε.

On sait que, dans l'espace à n dimensions, toute fonction continue dans un domaine fini y est uniformément continue. Pour bien comprendre la raison de cette circonstance, il faut connaître la notion d'ensemble compact, due à M. Fréchet. Dire qu'un volume V de

---

[1] On peut être tenté de considérer comme une exception le cas d'une fonctionnelle telle que

$$U = \int_0^1 x'^2\,dt,$$

dont la variation, lorsque x' est continue et que x'' existe, peut s'écrire

$$2\,[x'\,\delta x]_0^1 - 2\int_0^1 x''\,\delta x\,dt,$$

et a une continuité d'ordre o. Mais cette continuité n'appartient pas à la fonctionnelle elle-même. On peut, en effet, trouver des déterminations de x, telles que $\frac{1}{n}\sin n\pi t$, inférieures dans tout l'intervalle à n'importe quel nombre donné si n est assez grand, et telles pourtant que U ne tende pas vers la valeur o, qu'elle prend pour $x = 0$.

l'espace à n dimensions est *compact*, c'est dire qu'étant donnée une suite infinie

$$A_1, A_2, \ldots, A_p, \ldots$$

de points de ce volume, on peut trouver au moins un point A tel qu'il existe une suite infinie extraite de la suite précédente et tendant vers A. Considérons alors une fonction u qui soit continue dans V. Si elle n'était pas uniformément continue, il existerait un nombre positif ε auquel on ne pourrait faire correspondre aucun nombre η tel que, à deux points A et A′ distants de moins de η correspondent nécessairement deux valeurs de u différant de moins de ε. Ce serait donc qu'on pourrait trouver une suite de couples de points A_p, A'_p, tels que la distance $A_pA'_p$ tende vers o quand p augmente indéfiniment, et que les valeurs de la fonction u en A_p et A'_p diffèrent de plus de ε. Mais les A_p auraient au moins un point limite A, où la fonction u ne serait pas continue, ce qui serait contraire à l'hypothèse.

Ce résultat ne s'étend pas à l'espace fonctionnel, où un domaine fini V n'est en général pas compact. Considérons, par exemple, la suite de points correspondant aux fonctions

$$\cos 2\pi t, \quad \cos 4\pi t, \quad \ldots, \quad \cos 2^p \pi t, \quad \ldots.$$

Ces points sont compris dans un volume fini, aussi bien avec la définition (1) de la distance qu'avec la définition (2), mais il est impossible d'en extraire une suite tendant vers une limite, puisque la distance de deux quelconques d'entre eux est 1, si l'on considère la distance définie par la formule (1), et 2, si l'on considère la distance définie par la formule (2).

15. **Fonctionnelles dépendant d'un paramètre.** — Considérons une famille de fonctionnelles U_λ dépendant d'un paramètre λ, et définies dans un champ fonctionnel C. On dit qu'elles sont *également continues* dans le champ C et pour un certain ensemble de valeurs de λ, si, en chaque point du champ C, le module de continuité relatif à un nombre ε peut être choisi indépendamment de λ. S'il peut être choisi indépendamment à la fois de λ et de $x(t)$, les fonctionnelles U_λ sont dites *également et uniformément continues*.

On dit que U_λ *tend vers* U_{λ_0} quand λ tend vers λ_0, s'il en est ainsi

en chaque point du champ C, c'est-à-dire si, en chacun de ces points, ε étant un nombre positif si petit qu'on veut, on peut déterminer η tel qu'en ce point, et pour $|\lambda| < \eta$, on ait nécessairement $|U_\lambda - U_{\lambda_0}| < \varepsilon$. Si η peut être choisi indépendamment du point considéré dans le champ C, on dit que U_λ tend *uniformément* vers sa limite.

Il est facile de préciser ce que la convergence uniforme ajoute à la convergence simple.

1° Soit une fonctionnelle U_λ, tendant, quand λ tend vers o, vers une fonctionnelle continue U_0. Si, à partir d'une certaine valeur de λ et d'une fonction $x(t)$ correspondant à un point du champ C, on fait varier soit λ, soit $x(t)$, U_λ varie d'une manière continue. Mais il n'en résulte pas que U_λ varie d'une manière continue quand on fait varier simultanément λ et $x(t)$. Cette conséquence est, au contraire, évidente, soit si U_λ tend uniformément vers U_0, soit si les fonctionnelles U_λ sont également continues. En écrivant, en effet, dans le premier cas,

$$\begin{aligned} U_\lambda|[X(t)]| - U_0|[x(t)]| = & \left\{ U_\lambda|[X(t)]| - U_0|[X(t)]| \right\} \\ & + \left\{ U_0|[X(t)]| - U_0|[x(t)]| \right\}, \end{aligned}$$

et, dans le second cas,

$$\begin{aligned} U_\lambda|[X(t)]| - U_0|[x(t)]| = & \left\{ U_\lambda|[X(t)]| - U_\lambda|[x(t)]| \right\} \\ & + \left\{ U_\lambda|[x(t)]| - U_0|[x(t)]| \right\}, \end{aligned}$$

on décompose l'accroissement de U en deux termes tous deux inférieurs à $\frac{\varepsilon}{2}$ si λ est assez petit et $X(t)$ assez voisin de $x(t)$.

Cette remarque généralise le fait bien connu qu'une fonction $u(x, \lambda)$ peut être continue par rapport à chacune des variables, prise séparément, sans l'être par rapport à l'ensemble des variables. Si, au contraire, la continuité par rapport à l'une des variables est uniforme par rapport à l'autre, c'est-à-dire si le module de continuité relatif à λ par exemple peut, pour chaque valeur de λ, être choisi indépendamment de x, cette circonstance n'est plus possible.

2° Voici, par contre, une différence essentielle avec le cas d'une fonction de deux variables. La fonctionnelle U_λ étant supposée varier d'une manière continue avec λ et $x(t)$, il n'en résulte pas nécessairement que la convergence de U_λ vers U_0, quand λ tend vers o, soit

uniforme dans C, tandis que, dans le cas d'une fonction $u(x, \lambda)$. si elle est continue, la convergence de $u(x, \lambda)$ vers $u(x, 0)$ est uniforme par rapport à x.

On voit par cette remarque que, dans le domaine fonctionnel, la notion de convergence uniforme apporte une double restriction à la notion de convergence simple. Dans l'espace ordinaire, ces deux restrictions n'en font qu'une.

CHAPITRE III.

FONCTIONS SOMMABLES ET FONCTIONS A VARIATION BORNÉE.

SOMMAIRE. — Mesure d'un ensemble de points. — Fonctions mesurables. — Intégration des fonctions mesurables bornées. — Les fonctions sommables. — Les fonctions de carrés sommables et leur représentation par des séries trigonométriques. — Les fonctions à variation bornée. — L'intégrale de Stieltjes. — Les fonctionnelles additives à variation bornée. — L'intégrale double de Stieltjes.

Le présent Chapitre contient un résumé de travaux connus de MM. Jordan, Borel et Lebesgue sur la théorie des fonctions. Pour être accessible à un aussi grand nombre que possible de lecteurs, nous avons pensé qu'il valait mieux ne pas les supposer connus. Mais, pour les résumer en un seul Chapitre, nous avons dû supprimer certaines démonstrations et en indiquer d'autres très brièvement. Le lecteur désirant plus de détails les trouvera dans les *Leçons sur l'intégration*, de M. Lebesgue.

16. **Mesure d'un ensemble de points.** — Considérons d'abord un ensemble de points d'une droite. S'il est constitué par tous les points d'un intervalle, on peut le *mesurer* par la longueur de cet intervalle. S'il est constitué par la réunion d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'intervalles sans points communs deux à deux, on peut le mesurer par la somme des longueurs de ces intervalles, somme nécessairement finie si tous ces intervalles sont compris dans une portion finie de droite.

M. Jordan a le premier étendu la notion de mesure à des ensembles plus généraux. Il considère un ensemble E comme ayant une mesure l si, quelque petit que soit ε, on peut comprendre tous ses points dans un nombre fini ou une infinité dénombrable d'intervalles de mesure totale inférieure à $l+\varepsilon$, et si, d'autre part, on peut former un nombre fini d'intervalles de mesure totale supérieure à $l-\varepsilon$ ne

comprenant que des points de E. On dit actuellement qu'un pareil ensemble est *mesurable* J.

Il résulte immédiatement de cette définition que tout ensemble dénombrable, en particulier l'ensemble des nombres rationnels compris entre 0 et 1, a une mesure nulle. Par suite, l'ensemble des nombres irrationnels compris entre 0 et 1, qui comprend dans cet intervalle tous les points n'appartenant pas au précédent, doit être considéré comme ayant une mesure égale à 1. Or il n'est pas mesurable J puisqu'on ne peut trouver aucun intervalle qui lui appartienne entièrement. On voit donc que la notion de mesure s'étend facilement à d'autres ensembles que les ensembles mesurables J.

M. Borel a considéré des ensembles plus généraux, qu'on appelle ensembles *mesurables* B. D'après lui, un ensemble E, intérieur à un intervalle *ab* de longueur L, a une mesure l si, quelque petit que soit ε, on peut comprendre tous ses points dans un nombre fini ou une infinité dénombrable d'intervalles de mesure totale inférieure à $l+\varepsilon$, et son *complémentaire* dans *ab* (ensemble composé des points de *ab* n'appartenant pas à E) dans un nombre fini ou une infinité dénombrable d'intervalles de mesure totale inférieure à $L-l+\varepsilon$. Si l'ensemble E n'est pas intérieur à un intervalle fini, on obtient sa mesure comme limite de la mesure de l'ensemble comprenant les points communs à E et à un intervalle qui augmente jusqu'à constituer toute la droite.

L'exemple de l'ensemble des nombres irrationnels compris entre 0 et 1 montre que cette notion est plus générale que la précédente. M. Borel a montré qu'on peut, sans sortir des ensembles mesurables B, effectuer sur des ensembles mesurables B les deux opérations suivantes :

1° Faire la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles;

2° Prendre la partie commune à un nombre fini ou à une infinité dénombrable d'ensembles [1].

Indiquons encore que, si un ensemble E est mesurable B, et si l'on

---

[1] Pour plus de détails sur ces questions, et en particulier pour la démonstration du résultat de M. Borel, *voir* H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration*, p. 36-45 et 102-110.

choisit ε positif et très petit, on peut définir un ensemble E_1, composé d'un *nombre fini* d'intervalles, tel que l'ensemble des points de E n'appartenant pas à E_1 ait une mesure inférieure à ε et qu'il en soit de même de l'ensemble des points de E_1 n'appartenant pas à E. Cela résulte de ce que, l étant la mesure de E, les points de cet ensemble peuvent être compris dans une infinité dénombrable d'intervalles de longueur totale inférieure à $l+\varepsilon$, et qu'on peut réduire ces intervalles à un nombre fini en enlevant des intervalles de longueur totale inférieure à ε. Nous pouvons alors dire, en langage moins précis, que l'*on peut approcher autant que l'on veut d'un ensemble mesurable* B *par des ensembles composés d'un nombre fini d'intervalles.*

17. Quoique la notion d'ensemble mesurable B soit très générale, il existe des ensembles qui ne sont pas mesurables B. Peut-on leur étendre la notion de mesure? On peut être tenté de croire que cette notion peut s'étendre à tous les ensembles de points d'une droite, et que seule l'impuissance de nos moyens de définir la mesure ne nous permet pas de le faire dans tous les cas. Il n'en est rien. Nous allons compléter ces remarques en montrant qu'on peut concevoir un ensemble qui n'est certainement mesurable par aucun procédé.

Répartissons les points d'une circonférence de rayon 1 en ensembles E tels que, si A est un point d'un de ces ensembles, tous les autres points du même ensemble soient obtenus en portant de part et d'autre de A sur la circonférence les longueurs entières 1, 2, ... Appelons $\mathcal{E}$ un ensemble qui contienne un point et un seul de chacun des ensembles E.

Au sujet de cet ensemble $\mathcal{E}$, nous devons signaler qu'on ne sait d'aucune manière énoncer une règle permettant de définir quel est l'élément qu'on choisira dans chacun des ensembles E; les règles de cette sorte que l'on peut chercher à former s'appliqueront à certains ensembles E, quelquefois à une infinité, mais non à tous. Il en résulte que, parmi les ensembles $\mathcal{E}$ que l'on peut concevoir, il est impossible d'en choisir effectivement un. D'après MM. Borel, Baire et Lebesgue, cette circonstance doit rendre très prudent sur les raisonnements où interviennent des ensembles tels que $\mathcal{E}$. Nous pensons quand même que ces raisonnements ne doivent pas être interdits, pas plus que l'impossibilité pour deux physiciens de savoir s'ils pensent au même

atome d'hydrogène ne doit les empêcher de raisonner sur ces atomes.

Soit donc $\mathcal{E}$ un des ensembles répondant à la définition que nous venons de donner. Appelons $\mathcal{E}_n$ et $\mathcal{E}_{-n}$ les ensembles déduits de $\mathcal{E}$ par une rotation de n dans un sens et dans l'autre. Il est évident que la réunion des ensembles

$$\ldots, \mathcal{E}_{-n}, \ldots, \mathcal{E}_{-1}, \mathcal{E}, \mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n, \ldots$$

comprend tous les points du cercle, sans qu'aucun point soit obtenu deux fois.

Ceci posé, si $\mathcal{E}$ avait une mesure, tous les ensembles $\mathcal{E}_n$ et $\mathcal{E}_{-n}$ auraient la même mesure [1]. Cette mesure ne peut être finie puisqu'il faut une infinité d'ensembles égaux à $\mathcal{E}$ pour constituer toute la circonférence. Elle ne peut pas non plus être nulle, car $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ étant des nombres positifs quelconques, on pourrait affirmer que $\mathcal{E}$ a une mesure inférieure à a_0, que $\mathcal{E}_n$ et $\mathcal{E}_{-n}$ ont une mesure inférieure à a_n, et que, par suite, la réunion de ces ensembles, qui constitue toute la circonférence, a une mesure inférieure à

$$a_0 + 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots),$$

quantité qu'on peut rendre aussi petite qu'on veut puisque les a sont quelconques. L'ensemble $\mathcal{E}$ n'est donc pas mesurable; du moins une définition de la mesure ne peut s'appliquer à cet ensemble que si elle n'est pas telle que la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles ait pour mesure la somme de ces ensembles, et une définition n'ayant pas cette propriété ne correspondrait en rien à la notion intuitive de mesure.

18. Les notions précédentes s'étendent sans peine aux ensembles de points du plan ou de l'espace, ou même d'un espace à n dimensions.

Plaçons-nous dans le plan, par exemple; on peut définir la notion de mesure par généralisation de la notion d'aire; on peut aussi, dans le plan, avoir à considérer des ensembles de points situés sur une

---

[1] Une généralisation de la notion de mesure pour laquelle deux ensembles superposables tels que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_n$ n'auraient pas même mesure serait sans intérêt. (*Voir* H. Lebesgue, *Loc. cit.*, p. 103.)

courbe et leur appliquer la notion de mesure généralisant celle de longueur. Pour éviter toute ambiguïté, on dit, dans le premier cas, *mesure superficielle* et, dans le second cas, *mesure linéaire*.

Nous aurons aussi à considérer la mesure linéaire de la projection d'un ensemble sur une droite; cette mesure ne peut être nulle que si la mesure superficielle est nulle.

19. **Fonctions mesurables.** — Une fonction $x(t)$, définie dans un intervalle (a, b), est dite *mesurable* si, quel que soit le nombre ξ, l'ensemble des points de cet intervalle pour lesquels $x < \xi$ est mesurable. Soit $l = f(\xi)$ sa mesure. La fonction $f(\xi)$, qu'on appelle *fonction sommatoire* de $x(t)$, dans l'intervalle (a, b), n'est jamais décroissante, c'est-à-dire que

$$\xi_1 > \xi_2$$

entraîne

$$f(\xi_1) \geqq f(\xi_2).$$

Si $x(t)$ n'est infini qu'au plus pour les points d'un ensemble de mesure nulle, $f(\xi)$ croît de o à $L = b - a$ lorsque ξ croît de $-\infty$ à $+\infty$. Cette fonction peut croître par bonds discontinus; si $x(t)$ est égal à une certaine valeur ξ pour tous les points d'un ensemble de mesure α non nulle, la fonction $f(\xi)$ croît brusquement de α lorsque ξ devient supérieur à cette valeur.

L'ensemble des points de l'intervalle (a, b) pour lesquels

$$\xi_1 \leqq \xi < \xi_2$$

a pour mesure

$$f(\xi_2) - f(\xi_1).$$

Toute fonction continue est mesurable. Il en est de même des fonctions admettant un nombre fini de discontinuités. Mais la notion de fonction mesurable est bien plus générale.

On démontre aisément que la somme, le produit, le quotient de deux fonctions mesurables sont des fonctions mesurables, et que toute opération continue, effectuée en partant de fonctions mesurables, donne des fonctions mesurables.

20. **Intégration des fonctions mesurables bornées.** — Si, dans tout l'intervalle (a, b), on a

$$m < x(t) < M,$$

il suffit de faire varier ξ de m à M pour que $f(\xi)$ croisse de o à $L = b - a$.

Divisons l'intervalle (m, M) en p intervalles partiels par des points de division $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$. Désignons par ξ_i un nombre quelconque de l'intervalle (x_{i-1}, x_i) (en posant $x_0 = m$, $x_p = M$), et par $Df(x_i)$ l'accroissement de $f(x)$ dans le même intervalle, c'est-à-dire $f(x_i) - f(x_{i-1})$; c'est une quantité essentiellement positive. Considérons la somme

$$(1) \qquad \sum_{1=1}^{i=p} \xi_i \, Df(x_i).$$

Elle est comprise entre $\Sigma x_{i-1} Df(x_i)$ et $\Sigma x_i Df(x_i)$. La première de ces quantités allant en croissant quand p augmente, la deuxième en décroissant, et leur différence

$$\Sigma(x_i - x_{i-1}) \, Df(x_i) < L \operatorname{Max}(x_i - x_{i-1})$$

tendant vers o quand le nombre des points de division augmente indéfiniment, le plus grand des intervalles (x_{i-1}, x_i) tend vers o. L'expression (1) a donc une limite dont on démontre aisément, comme dans la théorie des intégrales définies ordinaires, qu'elle est indépendante du mode de division adopté. Il est naturel de désigner cette limite par

$$(2) \qquad \int_m^M \xi \, df(\xi),$$

en utilisant une notation (intégrale de Stieltjes), que nous généraliserons plus loin.

Dans le cas où $x(t)$ est une fonction continue, on démontre aisément que l'intégrale (2) est égale à

$$(3) \qquad \int_a^b x(t) \, dt.$$

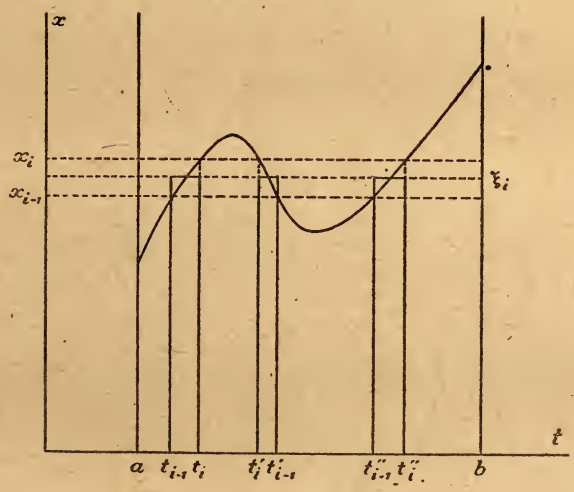
La figure ci-contre montre en effet clairement que le produit $\xi_i Df(x_i)$ représente l'aire de l'ensemble des rectangles de hauteur ξ_i et ayant pour bases sur l'axe des t les intervalles (t_{i-1}, t_i), (t'_i, t'_{i-1}), (t''_{i-1}, t''_i) dans lesquels $x(t)$ est compris entre x_{i-1} et x_i. L'indice i variant de 1 à p, ces intervalles réunis constitueront tout l'intervalle (a, b), et l'expression (1) est représentée par une aire, limitée

supérieurement par une ligne brisée dont l'ordonnée diffère de $x(t)$ d'une quantité inférieure au maximum de $(x_i - x_{i-1})$. Cette aire tend donc vers l'aire curviligne représentée par l'intégrale (3).

Cette théorie est due à M. Lebesgue. Son intérêt consiste en ce que l'expression (2) conserve un sens dans des cas où l'intégrale au sens ordinaire du mot n'en a pas. On peut alors considérer l'intégrale de $x(t)$ dans l'intervalle (a, b) comme égale, par définition, à l'expression (2).

On remarque, en effet, que l'on peut modifier la valeur de $x(t)$ pour les points d'un ensemble de mesure nulle sans rien changer à la fonction sommatoire $f(\xi)$, et par suite sans rien changer à l'intégrale (2), qui ne dépend pas de cette fonction. Au contraire, par un

Fig. 1.



tel changement, la fonction $x(t)$, si elle était continue, ne le reste pas, et l'intégrale (3) cesse d'avoir un sens.

Un ensemble de valeurs prises par la fonction $x(t)$, au point de vue de l'intégration des fonctions mesurables, n'a donc d'intérêt que si l'ensemble des valeurs correspondantes de t a une mesure non nulle. Ainsi l'intervalle (x_{i-1}, x_i) n'est à considérer que si $Df(\xi_i)$ n'est pas nul. Pour le calcul de l'intégrale (3), la valeur de $Df(\xi_i)$, mesure de l'ensemble des valeurs de t considérées, importe seule, et non la situation de l'ensemble considéré dans l'intervalle (a, b). Mais

pour le calcul d'une intégrale du type plus général

$$\int_a^b \varphi(t)x(t)\,dt,$$

$\varphi(t)$ étant une autre fonction mesurable, il importe évidemment de connaître les valeurs de $\varphi(t)$ pour les points de l'ensemble considéré, et pour cela de connaître la situation de cet ensemble dans l'intervalle (a, b).

Nous conviendrons de considérer une fonction mesurable $x(t)$ comme connue si l'on a les éléments voulus pour calculer l'intégrale précédente, quelle que soit la fonction également mesurable $\varphi(t)$. On voit aisément qu'il faut et il suffit, pour cela, que la fonction sommatoire soit connue, non seulement pour l'intervalle (a, b), mais pour n'importe quel intervalle tel que (a, c), c variant de a à b, et par suite pour tout intervalle intérieur à l'intervalle (a, b).

21. L'intégrale définie généralisée d'après M. Lebesgue possède la plupart des propriétés de l'intégrale ordinaire. Les formules d'addition

$$\int_a^b x(t)\,dt = \int_a^c x(t)\,dt + \int_c^b x(t)\,dt, \tag{4}$$

$$\int_a^b [x(t)+y(t)]\,dt = \int_a^b x(t)\,dt + \int_a^b y(t)\,dt, \tag{5}$$

la formule

$$\left|\int_a^b x(t)\,dt\right| \leqq \int_a^b |x(t)|\,dt, \tag{6}$$

la formule de la moyenne

$$\int_a^b x(t)y(t)\,dt = \mathrm{X}\int_a^b y(t)\,dt \qquad [y(t) > 0,\ m < \mathrm{X} < \mathrm{M}] \tag{7}$$

et l'inégalité de Schwarz

$$\left[\int_a^b x(t)y(t)\,dt\right]^2 \leqq \int_a^b x^2(t)\,dt \int_a^b y^2(t)\,dt \tag{8}$$

restent exactes et se démontrent aisément. Par contre, la formule

$$\frac{d}{d\tau}\int_a^\tau x(t)\,dt = x(\tau)$$

peut être en défaut, puisqu'on peut changer la valeur de $x(t)$ pour les points d'un ensemble de mesure nulle, et en particulier au point $t = \tau$, sans changer le premier membre; mais elle ne peut être en défaut que pour les points d'un ensemble de mesure nulle.

22. Les fonctions sommables. — Considérons maintenant une fonction mesurable pouvant devenir infinie, mais seulement pour les points d'un ensemble de mesure nulle, de sorte que la fonction $f(\xi)$ tend vers o si ξ croît indéfiniment par valeur négative, et vers L si ξ croît indéfiniment par valeurs positives. Il peut arriver que les intégrales

$$(9) \qquad -\int_{-M}^{0} \xi\, df(\xi), \quad \int_{0}^{M} \xi\, df(\xi),$$

qui augmentent avec M, aient des limites finies lorsque M croît. L'expression

$$(10) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \xi\, df(\xi)$$

a alors un sens bien défini. Si d'ailleurs $x(t)$ est finie, elle se réduit à l'intégrale (2), et si, sans rester finie, $x(t)$ est telle que l'intégrale

$$\int_a^b |x(t)|\, dt$$

ait une valeur finie, on démontre aisément que l'intégrale (9) est égale à

$$(3) \qquad \int_a^b x(t)\, dt.$$

Dans les cas de fonctions où l'intégrale au sens ordinaire n'existe pas, et par généralisation de la définition donnée n° 20, nous prendrons avec M. Lebesgue la formule (10) comme définition de l'intégrale de $x(t)$ dans l'intervalle (a, b).

La fonction $x(t)$ est dite *sommable* lorsque cette définition s'applique. Une fonction sommable est donc une fonction mesurable pour laquelle les expressions (9) ont une limite pour M infini.

On peut songer à généraliser encore cette définition en considérant

l'expression (10) comme ayant un sens lorsque

$$\int_{-M}^{+M} \xi \, df(\xi) \tag{11}$$

a une limite pour M infini. Cela serait sans grand intérêt, car il pourrait arriver, si les expressions (9) n'ont pas toutes deux une limite, que la limite de (11) et l'intégrale (3) aient toutes deux un sens mais ne soient pas égales.

23. Les fonctions de carrés sommables. — Si l'on applique la méthode d'intégration de M. Lebesgue au carré de la fonction $x(t)$, on est conduit à former l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \, df(\xi) = \int_a^b x^2(t)\, dt.$$

Si cette intégrale a un sens, la fonction $x(t)$ est *de carré sommable*. La comparaison de cette intégrale avec l'intégrale (10) montre qu'une fonction de carré sommable est elle-même sommable, mais qu'une fonction sommable n'est pas nécessairement de carré sommable. La notion de fonction de carré sommable est donc plus restrictive que la précédente.

Si les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont de carrés sommables, leur distance, définie par la formule

$$r^2 = \int_0^1 [y(t) - x(t)]^2 \, dt = \int_0^1 x^2(t)\, dt + \int_0^1 y^2(t)\, dt - 2\int_0^1 x(t)\, y(t)\, dt$$

a un sens. Pour le démontrer, il suffit de vérifier que le dernier terme de l'expression développée de r^2 a un sens. Si nous appelons $x_M(t)$ et $y_M(t)$ des fonctions respectivement égales à $x(t)$ et $y(t)$ lorsque celles-ci sont comprises entre $-M$ et $+M$, et, dans le cas contraire, à $\pm M$, suivant le signe de $x(t)$ et $y(t)$, nous pouvons écrire

$$\left[\int_0^1 |x_M(t)\, y_M(t)|\, dt\right]^2 \leqq \int_0^1 x_M^2(t)\, dt \int_0^1 y_M^2(t)\, dt.$$

Lorsque M augmente indéfiniment, le premier membre de cette inégalité croît constamment, en restant inférieur au second qui a une limite. Il a donc une limite, et l'inégalité de Schwarz reste vraie à la

limite. Il en résulte bien que le dernier terme de l'expression développée de r^2 a un sens.

La définition normale de la distance s'applique donc dans tout le champ des fonctions de carrés sommables, et la distance de deux fonctions quelconques de ce champ est finie.

24. Les fonctions de carrés sommables et leurs représentations par des séries trigonométriques. — La notion de fonction de carré sommable pouvant ne pas paraître très simple, nous allons montrer qu'on peut approcher autant qu'on veut d'une telle fonction par des fonctions plus simples.

La définition considérée de la distance vérifiant cette condition que la distance de deux fonctions est toujours au plus égale à la somme de leurs distances à une troisième, nous pouvons effectuer successivement en partant de $x(t)$ plusieurs approximations nous conduisant à former successivement des fonctions $X_1(t), \ldots, X_p(t)$; si les distances de deux approximations consécutives sont inférieures respectivement à $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p$, la distance de $x(t)$ et $X_p(t)$ est inférieure à

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_p.$$

1° Comme première approximation, prenons pour $X_1(t)$ une des fonctions $x_M(t)$ définie n° 23. On voit aisément que

$$\int_0^1 [x(t) - x_M(t)]^2\, dt = \int_{-\infty}^{-M} (\xi + M)^2\, df(\xi) + \int_M^{\infty} (\xi - M)^2\, df(\xi)$$
$$\leqq \int_{-\infty}^{-M} \xi^2\, df(\xi) + \int_M^{\infty} \xi^2\, df(\xi)$$

peut être rendue inférieure à tout nombre donné ε_1^2 si M est assez grand. On approche ainsi autant qu'on veut de $x(t)$ par une fonction mesurable bornée $X_1(t)$.

2° M étant la limite supérieure de $|X_1(t)|$, divisons l'intervalle $(-M, +M)$ en intervalles inférieurs à ε_2, et remplaçons les valeurs de $X_1(t)$ intérieures à chaque intervalle par une valeur déterminée choisie dans chaque intervalle. Nous obtenons ainsi une fonction $X_2(t)$ n'ayant qu'un nombre fini N de valeurs distinctes $\xi_1, \ldots, \xi_N$, et approchant de $X_1(t)$ de moins de ε_2.

3° L'ensemble des points de l'intervalle $(0, 1)$, où $X_2(t)$ prend

chacune des valeurs ξ_i, est mesurable. Nous pouvons donc l'approcher par une somme d'un nombre fini d'intervalles de manière que les points appartenant à cet intervalle sans appartenir à l'ensemble ou inversement constituent un ensemble de mesure inférieure à $\frac{\varepsilon_3^2}{NM^2}$. L'ensemble de tous les intervalles ainsi formés en considérant successivement chaque valeur $\xi_1, \ldots, \xi_N$ ne reconstitue pas nécessairement l'intervalle (0, 1), mais les intervalles non comptés ou comptés plusieurs fois ont une longueur totale inférieure à $\frac{\varepsilon_3^2}{M^2}$. La fonction $X_3(t)$, égale à 0 dans ces intervalles, et égale dans chacun des autres à la valeur ξ_i à partir de laquelle cet intervalle a été obtenu, est à une distance à $X_2(t)$ inférieure à ε_3. C'est une fonction obtenue en divisant l'intervalle de variation de t en un nombre fini N′ d'intervalles partiels et en choisissant une valeur constante dans chaque intervalle.

4° En chaque point de discontinuité de $X_3(t)$, on peut rétablir la continuité et celle des dérivées jusqu'à tout ordre donné p en ne modifiant les valeurs de la fonction que sur un petit intervalle de longueur $\frac{\varepsilon_4^2}{N'M^2}$, et en la modifiant en chaque point d'une quantité $\leqq M$. La fonction $X_4(t)$ ainsi obtenue est à une distance de $X_3(t)$ inférieure à ε_4.

5° Si $p \geqq 2$, la fonction $X_4(t)$ est sûrement représentable par une série trigonométrique uniformément convergente. On peut la limiter à un nombre fini de termes et obtenir ainsi une série limitée

$$X_5(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos 2\pi t + B_1 \sin 2\pi t + \ldots + A_n \cos 2n\pi t + B_n \sin 2n\pi t$$

dont la distance à $X_4(t)$ est inférieure à ε_5, et dont par suite la distance à $x(t)$ est inférieure à

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5,$$

quantité aussi petite que l'on veut. Or, de toutes les séries de la même forme que $X_5(t)$, celle dont la distance à $x(t)$ est minimum est la fonction

$$(12) \qquad \varphi_n(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos 2\pi t + b_1 \sin 2\pi t + \ldots + a_n \cos 2nt + b_n \sin 2n\pi t,$$

formée avec les coefficients de Fourier

$$a_i = 2\int_0^1 x(t) \cos 2i\pi t \, dt, \qquad b_i = 2\int_0^1 x(t) \sin 2i\pi t \, dt \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

La fonction $\varphi_n(t)$ est donc distante de $x(t)$ de moins de ε et converge en moyenne vers cette fonction quand n devient infini. On peut alors dire que $x(t)$ est « représentable » par une série trigonométrique, bien que cette série ne soit pas nécessairement convergente pour toutes les valeurs de t. En écrivant que la distance de $x(t)$ et de $\varphi_n(t)$ tend vers o, on obtient la formule

$$(13) \qquad 2\int_0^1 x^2(t)\,dt = \frac{a_0^2}{2} + a_1^2 + b_1^2 + \ldots + a_n^2 + b_n^2 + \ldots,$$

la série qui figure au second membre étant nécessairement convergente.

25. Le résultat que nous venons d'obtenir admet une réciproque. Considérons une série trigonométrique formée avec des coefficients a_n, b_n tels que

$$(14) \qquad a_1^2 + b_1^2 + \ldots + a_n^2 + b_n^2 + \ldots$$

soit convergente. Je dis qu'il lui correspond une fonction de carré sommable $x(t)$ bien déterminée.

Cela signifie, non que la série considérée soit convergente, ni que nous sachions calculer effectivement $x(t)$, mais, d'après le n° 21, que l'on sait calculer la fonction sommatoire $f(\xi)$ et aussi la fonction analogue relative à n'importe quel ensemble mesurable E composé de points de l'intervalle (o, 1). Soit $g(\xi)$ cette fonction pour un ensemble E déterminé. Soit $g_n(\xi)$ la fonction analogue obtenue en remplaçant $x(t)$ par

$$\varphi_n(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos 2\pi t + b_1 \sin 2\pi t + \ldots + a_n \cos 2\pi nt + b_n \sin 2\pi nt.$$

Il s'agit de démontrer que $g_n(\xi)$ tend (sauf peut-être en certains points constituant un ensemble de mesure nulle) vers une fonction déterminée $g(\xi)$. D'une manière précise, nous allons montrer que la courbe représentant la fonction non décroissante $g_n(\xi)$ (la courbe étant rendue continue aux points de discontinuité par un trait vertical) a une limite.

S'il n'en était pas ainsi, il existerait un nombre ε tel que, si grand que soit N, on pourrait trouver n et n' supérieurs à N tels qu'un petit carré de côtés parallèles aux axes de coordonnées et de longueur ε

puisse être compris entre les courbes représentant $g_n(\xi)$ et $g_{n'}(\xi)$. Il en résulterait évidemment que les fonctions $g_n(\xi)$ et $g_{n'}(\xi)$ différeraient d'au moins ε pour les points d'un ensemble de mesure ε. Le carré de leur distance serait alors supérieur à ε^2, ce qui n'est pas possible, puisqu'il a pour valeur (en supposant, par exemple, $n' > n$)

$$\frac{1}{2}(a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + \ldots + a_{n'}^2 + b_{n'}^2) < \frac{1}{2}(a_{N+1}^2 + b_{N+1}^2 + \ldots),$$

quantité qui tend vers o pour N très grand.

L'existence d'une fonction $g(\xi)$ déterminée pour chaque ensemble E, par suite l'existence d'une fonction mesurable $x(t)$ bien déterminée, sont ainsi établies.

Si l'on applique alors la méthode d'intégration de M. Lebesgue à la détermination de l'intégrale

$$\int_0^1 x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2\,df(\xi),$$

on trouve qu'elle est la limite, pour n infini, de

$$\int_0^1 \varphi_n^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2\,df_n(\xi) = \frac{1}{2}\left(\frac{a_0^2}{2} + a_1^2 + b_1^2 + \ldots + a_n^2 + b_n^2\right),$$

limite qui est finie par hypothèse. Donc la fonction $x(t)$ est de carré sommable.

Si enfin on applique à cette fonction les formules de Fourier,

$$A_n = \int_0^1 x(t)\cos 2\pi n t\,dt,$$

$$B_n = \int_0^1 x(t)\sin 2\pi n t\,dt,$$

on constate par la même méthode que A_n et B_n ne sont autres que a_n et b_n. La fonction de carré sommable $x(t)$ admet donc bien comme coefficients de Fourier les nombres a_n et b_n donnés.

On voit qu'il y a identité entre la donnée d'une fonction de carré sommable et la donnée d'une suite de coefficients a_n et b_n dont les carrés constituent une série convergente.

Nous étendrons ces résultats au Chapitre VII à des séries de forme plus générale.

26. Les fonctions à variation bornée. — Considérons une fonction $x(t)$ bornée définie dans l'intervalle $(0, 1)$. Divisons cet intervalle en p intervalles partiels par les points de division $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{p-1}$. Appelons $D_i x$ l'accroissement de $x(t)$ dans l'intervalle de rang i. Posons

$$(15) \qquad T = |D_1 x| + |D_2 x| + \ldots + |D_p x|,$$

et appelons T_p la limite supérieure de T lorsque les points de division varient, leur nombre restant constant. Lorsque p augmente, T_p ne peut que croître ou rester constant; pour p infini, cette quantité ne peut donc que, ou devenir infinie, ou tendre en croissant vers une limite finie M. Dans ce dernier cas, on dit que la fonction $x(t)$ est *à variation bornée*, et M est sa *variation totale* dans l'intervalle $(0, 1)$.

On peut distinguer les $D_i x$ qui sont positifs et ceux qui sont négatifs. Soient σ la somme des premiers et $-\sigma'$ celle des seconds. On a évidemment

$$x(1) - x(0) = \sigma - \sigma', \qquad T = \sigma + \sigma'.$$

Lorsque T tend vers M, σ et σ' ont deux limites m et m' telles que

$$(16) \qquad x(1) - x(0) = m - m', \qquad M = m + m'.$$

Si, au lieu de l'intervalle $(0, 1)$, nous considérons l'intervalle $(0, t)$, t étant variable entre 0 et 1, on peut définir les quantités $F(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ analogues à M, m et m', et qui, lorsque t croît, ne peuvent pas décroître. Les formules (16) deviennent

$$(17) \qquad x(t) - x(0) = \varphi(t) - \psi(t), \qquad F(t) = \varphi(t) + \psi(t).$$

La première de ces formules nous montre que toute fonction à variation bornée est une différence de deux fonctions non décroissantes. Il y a d'ailleurs une infinité de manières de représenter $x(t)$ par une différence de telles fonctions $\Phi(t)$ et $\Psi(t)$; de toutes ces manières, celle que nous venons de définir est celle qui rend minimum la somme

$$\Phi(t) - \Phi(0) + \Psi(t) - \Psi(0).$$

Cela résulte de ce que la variation totale de $\Phi(t) - \Psi(t)$ dans l'intervalle $(0, t)$, au plus égale à cette somme si $\Phi(t)$ et $\Psi(t)$ sont des fonctions non décroissantes, lui est précisément égale lorsque ces

fonctions sont formées en partant de $x(t)$ comme nous venons de l'indiquer.

27 Considérons la fonction $\varphi(t)$, qui est une fonction non décroissante, c'est-à-dire telle que $T > t$ entraîne

$$\varphi(T) \geqq \varphi(t),$$

et croissant de 0 à m quand t croît de 0 à 1. Nous allons la décomposer en une somme de plusieurs fonctions plus simples.

Cette décomposition peut être rendue intuitive si l'on considère des masses positives pesantes réparties sur l'axe des t et qu'on suppose que $\varphi(t)$ soit la somme des masses situées sur l'intervalle $(0, t)$.

1° Il peut arriver qu'en un point τ soit située une masse finie a. Appelons $\varphi_1(t)$ la somme des masses de cette nature situées sur l'intervalle $(0, t)$. En chaque point θ où est située une masse a, la fonction $\varphi_1(t)$ a ce qu'on appelle une *discontinuité de première espèce*, c'est à-dire qu'elle a une limite lorsque t tend vers θ par valeurs inférieures à θ et qu'elle en a une autre, supérieure de a à la précédente, lorsque t tend vers θ par valeurs supérieures à θ.

La fonction non décroissante $\varphi(t)$ ne peut d'ailleurs avoir que des discontinuités de cette nature, et comme à chaque point de discontinuité est attachée une partie finie a de l'accroissement total m de $\varphi(t)$, ces points constituent au plus une infinité dénombrable, et la somme de toutes les quantités a est finie. Si l'on a bien tenu compte de tous ces points dans la définition de $\varphi(t)$, la différence $\varphi(t) - \varphi_1(t)$ est une fonction continue non décroissante.

2° Il peut arriver que des masses soient réparties sur l'axe des t avec une densité positive $\mu(t)$; il en résulte, sur l'intervalle $(0, t)$ une masse

$$\varphi_2(t) = \int_0^t \mu(\tau)\, d\tau, \tag{18}$$

qui est une nouvelle partie de la masse totale $\varphi(t)$ située sur cet intervalle. La fonction $\mu(t)$ peut d'ailleurs être une fonction sommable positive quelconque.

3° On peut concevoir une répartition des masses telle que toute la masse soit située aux points d'un ensemble de mesure nulle, et que cependant en aucun point ne soit située une masse finie ; une telle

répartition ne sera évidemment pas réductible aux deux précédentes.

Donnons-en un exemple, dû à M. Lebesgue.

Soit à répartir une masse 1 sur l'intervalle $(0, 1)$. Divisons cet intervalle en trois intervalles égaux ; celui du milieu ne contiendra aucune masse et la masse sera répartie également entre les deux autres. Divisons maintenant chacun de ces deux intervalles en trois intervalles égaux sur lesquels nous opérerons de même, et ainsi de suite. Après p opérations, nous obtiendrons des intervalles égaux à $\frac{1}{3^p}$; 2^p d'entre eux contiendront chacun une masse $\frac{1}{2^p}$, et les autres ne contiendront aucune masse. Lorsque p devient infini, la somme des intervalles contenant des masses a une longueur $\left(\frac{2}{3}\right)^p$ qui tend vers 0 ; à aucun point ne reste attachée une masse finie, et l'on obtient à la limite une répartition bien déterminée en ce sens que, pour chaque point t, la fonction égale à la somme des masses situées sur l'intervalle $(0, t)$ a une valeur bien déterminée, qu'on peut calculer à $\frac{1}{2^p}$ près si l'on connaît t à $\frac{1}{3^p}$ près.

Nous pouvons donc concevoir des masses réparties avec une densité infinie dans un ensemble de mesure nulle, sans qu'aucun point contienne de masse finie. Soit $\varphi_3(t)$ la partie de $\varphi(t)$ correspondant à une telle répartition.

28. Les fonctions $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ et $\varphi_3(t)$ sont évidemment irréductibles les unes aux autres, de sorte que la fonction

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \varphi_3(t) \tag{19}$$

représente une fonction non décroissante plus générale qu'aucun des trois termes. Nous allons montrer que toute fonction non décroissante peut être mise d'une manière unique sous la forme (19), et indiquer le moyen de former les trois termes.

Nous avons déjà indiqué que la connaissance de $\varphi_1(t)$ résulte de celle des discontinuités de $\varphi(t)$ et que, par soustraction de la fonction $\varphi_1(t)$ obtenue, on est ramené au cas d'une fonction $\varphi(t)$ continue. Plaçons-nous donc dans ce cas.

La fonction $\varphi_3(t)$, par définition, ne variant que pour les points d'un ensemble de mesure nulle, si $\varphi(t)$ est de la forme $\varphi_2(t) + \varphi_3(t)$,

$\varphi(t)$ a en dehors des points de cet ensemble même dérivée que $\varphi_2(t)$, soit $\mu(t)$, sauf pour les points d'un autre ensemble de mesure nulle, et $\varphi_2(t)$ peut être obtenu par intégration de cette dérivée. La fonction $\varphi_3(t)$ en résulte, par différence.

Mais il n'est pas évident qu'une fonction $\varphi(t)$, continue et non décroissante, dont on ne sait pas à l'avance si elle est de la forme $\varphi_2(t)+\varphi_3(t)$, admette une dérivée $\mu(t)$ définie presque partout (c'est-à-dire sauf pour les points d'un ensemble de mesure nulle). On peut éviter cette objection en passant par l'intermédiaire des fonctions sommatoires.

Considérons la fonction continue

$$\varphi_2(t)-\lambda t=\int_0^t[\mu(\tau)-\lambda]\,d\tau, \tag{20}$$

et décomposons-la, d'après le procédé indiqué n° 26, en une différence de deux fonctions $\varphi_\lambda(t)$ et $\psi_\lambda(t)$ continues et non décroissantes. La fonction $\varphi_\lambda(t)$, dont la connaissance résulte ainsi de celle de $\varphi(t)$, est évidemment égale à l'intégrale de $\mu(\tau)-\lambda$, dans l'ensemble des points situés entre o et t et où cette fonction est positive, c'est-à-dire que, si $f_t(\xi)$ désigne toujours la fonction sommatoire de $\mu(t)$ dans l'intervalle (o, t),

$$\varphi_\lambda(t)=\int_\lambda^\infty(\xi-\lambda)\,d_\xi f_t(\xi),$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\varphi_\lambda(t)}{d\lambda}=\int_\lambda^\infty d_\xi[-f_t(\xi)]=f_t(\lambda),$$

formule qui définit $f_t(\lambda)$, dont la connaissance équivaut à celle de $\mu(t)$.

Si l'on applique ces formules en partant, non de $\varphi_2(t)$, mais d'une fonction $\varphi(t)$, continue et non décroissante, à cela près quelconque, on vérifie sans peine qu'elles ont toujours un sens, la fonction $\varphi_\lambda(t)$ ayant en tous les points, sinon une dérivée, du moins une dérivée à droite et une dérivée à gauche. On arrive donc à une fonction $\mu(t)$ déterminée, dont l'intégration donne une fonction $\varphi_2(t)$.

Si l'on recommence les calculs en partant de cette fonction $\varphi_2(t)$, on doit évidemment retrouver les mêmes fonctions $f_t(\xi)$ et $\mu(t)$. C'est donc que les deux déterminations trouvées pour $\varphi_\lambda(t)$ [en par-

tant de $\varphi(t)$ ou de $\varphi_2(t)$] ont une différence indépendante de λ, par suite égale à $\varphi(t) - \varphi_2(t) = \varphi_3(t)$.

En langage moins précis, le procédé employé pour trouver $\mu(t)$ en partant de $\varphi(t)$ [ou $\varphi_2(t)$] est le suivant : pour savoir dans quel ensemble $\mu(t)$ est compris entre o et λ, on cherche dans quel ensemble $\varphi(t)$ [ou $\varphi_3(t)$] croît moins vite que λt, c'est-à-dire dans quel ensemble $\varphi(t) - \lambda t$ est décroissant. On trouve le même résultat en partant de $\varphi(t)$ ou de $\varphi_2(t)$. Si donc $\varphi_3(t)$ n'est pas nul, c'est-à-dire si $\varphi(t)$ croît plus vite que $\varphi_2(t)$, dans un ensemble où il en serait partout ainsi, on peut affirmer, en faisant croître λ de o à ∞, que $\varphi(t) - \lambda t$ et $\varphi_3(t) - \lambda t$ ne peuvent cesser d'être croissants, ni séparément, ni simultanément (car dans la partie de l'ensemble où ils cesseraient d'être croissants pour la valeur considérée de λ, ils seraient tous les deux croissants de la même quantité que λt). Donc, dans l'ensemble considéré, $\varphi(t)$ croît plus vite que λt, quel que soit λ. C'est un ensemble de mesure nulle où $\varphi(t)$ croît avec une vitesse infinie. En dehors de cet ensemble, $\varphi(t)$ croît comme $\varphi_2(t)$. La différence $\varphi(t) - \varphi_2(t)$, qui est continue, et croissante seulement pour les points d'un ensemble de mesure nulle, est bien du type désigné par $\varphi_3(t)$.

La possibilité de représenter $\varphi(t)$ par la formule (19) est donc démontrée. Le même résultat s'appliquant à la partie décroissante, ou non croissante, $x(t)$, et par suite à $x(t)$, on a pour cette fonction une décomposition de la forme

$$x(t) - x(0) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t).$$

Le premier terme correspond à une infinité dénombrable de masses, positives ou négatives, dont les valeurs absolues ont une somme finie; il est discontinu aux points où sont situées ces masses et constant ailleurs. Le dernier terme jouit également de la propriété de ne varier que pour les points d'un ensemble de mesure nulle, mais est continu. Le terme $x_2(t)$ est continu et jouit de la propriété de pouvoir être obtenu par l'intégration d'une fonction sommable, qui peut être définie presque partout (ce qui est suffisant), comme étant sa dérivée, ou celle de $x(t)$; une telle fonction est dite *absolument continue*.

29. **L'intégrale de Stieltjes.** — Soit $x(t)$ une fonction à variation bornée définie dans l'intervalle $(0, 1)$; soit $z(t)$ une fonction continue

définie dans le même intervalle. Divisons cet intervalle en p par des points de division $t_1, \ldots, t_{p-1}$. Appelons $D_i x$ l'accroissement de x dans l'intervalle de rang i et τ_i une valeur de t dans cet intervalle. La somme

$$z(\tau_1) D_1 x + \ldots + z(\tau_p) D_p x$$

tend, lorsqu'on augmente indéfiniment le nombre des intervalles de manière que le plus grand d'entre eux tende vers o, vers une limite bien déterminée, indépendante du choix des t_i et des τ_i, que l'on appelle l'*intégrale de Stieltjes* et qu'on représente par la notation

$$\int_0^1 z(t)\, dx(t).$$

Nous avons déjà utilisé cette notation, dans le cas où $z(t) = t$ et où $x(t)$ est une fonction croissante, pour exposer la méthode d'intégration de M. Lebesgue.

Cette intégrale est le numérateur de l'expression qui définit la *moyenne* de la fonction $z(t)$, si l'on donne aux différentes valeurs de $z(t)$ des poids proportionnels aux masses liées à la fonction $x(t)$.

La décomposition de $x(t) - x(0)$ en trois termes donne immédiatement pour l'intégrale de Stieltjes l'expression

$$(21) \qquad \Sigma a z(0) + \int_0^1 \mu(t) z(t)\, dt + \int_0^1 z(t)\, dx_3(t),$$

les a et la fonction $\mu(t)$ étant définis comme nous l'avons vu n° 27, mais étant ici de signes quelconques. Le premier terme ne dépend que des valeurs de la fonction $z(t)$ pour les points de discontinuité de la fonction $x(t)$, le troisième ne dépend que des valeurs de $z(t)$ pour les points d'un ensemble de mesure nulle et n'est pas représentable par une expression plus simple que l'intégrale de Stieltjes ; le deuxième dépend au contraire des valeurs de $z(t)$ dans tout ensemble de mesure positive où $\mu(t)$ n'est pas nul.

30. Les fonctionnelles additives à variation bornée. — La notion de mesure des ensembles et la méthode d'intégration de M. Lebesgue s'étendent sans peine aux espaces à plusieurs dimensions. Pour l'extension de la notion de fonction à variation bornée, il faut faire intervenir des notions se rattachant au calcul fonctionnel.

Soient E un ensemble de points de l'espace à n dimensions, et $\Phi(E)$ une fonctionnelle de E, c'est-à-dire une quantité ayant une valeur bien déterminée lorsque E est donné (du moins si cet ensemble vérifie certaines conditions). On dit que $\Phi(E)$ est une *fonctionnelle additive* si, lorsqu'un ensemble E est constitué par la réunion de deux ensembles E_1 et E_2 sans point commun et que Φ est définie pour ces ensembles, on a

$$\Phi(E) = \Phi(E_1) + \Phi(E_2).$$

Décomposons E en ensembles élémentaires DE, deux à deux, sans points communs, et pour chacun desquels Φ ait une valeur déterminée $D\Phi$. On a

$$\Phi(E) = \Sigma\, D\Phi.$$

Posons

$$T = \Sigma\, |D\Phi|,$$

et appelons T_p la limite supérieure de T lorsque p est le nombre des ensembles DE. Lorsque p augmente, T_p ne peut que croître ou rester constant; pour p infini, cette quantité ne peut donc que devenir infinie ou tendre en croissant vers une limite finie M. Dans ce dernier cas nous dirons que la fonctionnelle Φ est à *variation bornée* dans l'ensemble E, et que M est sa *variation totale* dans cet ensemble.

31. Nous nous placerons maintenant dans le plan, ce qui suffit pour mettre en évidence les propriétés principales des fonctionnelles additives à variation bornée, et nous supposerons que les ensembles considérés soient constitués par des aires. Pour décomposer sans ambiguïté une aire S en aires élémentaires DS, il faut naturellement préciser pour les contours communs à deux de ces aires ou pour les points communs à trois d'entre elles à laquelle ils appartiennent.

Comme nous l'avons fait pour l'étude des fonctions à variation bornée d'une variable, nous pouvons lier à la fonctionnelle Φ un système de masses réparties dans une région du plan. La valeur $\Phi|[S]|$ de Φ dans une aire S sera la somme des masses situées sur cette aire. La variation totale de Φ dans l'aire S sera la somme des valeurs absolues de ces masses.

Le principal changement, en passant de la droite au plan, provient de ce que des masses pouvant être concentrées en des points, sur des

lignes, ou réparties dans des aires, il y a un plus grand nombre de termes à distinguer :

1° Un premier terme Φ_1 est obtenu en tenant compte des masses finies pouvant être situées en certains points.

2° Un deuxième terme Φ_2 est obtenu en tenant compte des masses réparties sur des courbes et représentables par une intégrale de M. Lebesgue étendue à ces courbes.

3° Un troisième terme Φ_3 est obtenu en tenant compte des masses réparties sur des courbes et situées sur des ensembles de mesure linéaire nulle, sans qu'il y ait de masse finie en aucun point.

4° Un quatrième terme Φ_4 s'exprime par l'intégrale de M. Lebesgue, dans l'aire S, d'une fonction sommable $\mu(A)$ du point A. Par généralisation des raisonnements du n° 28, on voit que la fonction sommatoire $f_S(\lambda)$ de $\mu(A)$ dans l'aire S, égale par définition à la mesure superficielle de l'ensemble des points de l'aire S où $\mu(A)$ est inférieure à λ, et définie par la formule

$$f_S(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\varphi_\lambda|[S]|,$$

$\varphi_\lambda|[S]|$ désignant la somme des masses positives intérieures à S dans la répartition des masses liées à la fonctionnelle $\Phi|[S]| - \lambda s$, s étant la mesure de l'aire S.

5° Un dernier terme Φ_5 proviendra de masses situées dans un ensemble de mesure superficielle nulle, sans qu'il y ait de masses finies sur une courbe. Nous donnerons tout à l'heure des exemples de telles répartitions.

32. Dans le cas général, une fonctionnelle additive peut s'exprimer à l'aide d'une fonction de deux variables. Appelons s et t les coordonnées d'un point de la région où la fonctionnelle Φ est définie, et $\varphi(\sigma, \tau)$ la valeur de Φ pour l'aire composée des points de cette région pour lesquels

$$s < \sigma, \qquad t < \tau.$$

La connaissance de $\varphi(\sigma, \tau)$ équivaut à celle de Φ. En effet, cette fonction étant connue, la valeur de Φ pour le carré

$$\sigma \leqq s < \sigma + d\sigma, \qquad \tau \leqq t < \tau + d\tau$$

est

$$d_\sigma d_\tau \varphi(\sigma, \tau) = \varphi(\sigma + d\sigma, \tau + d\tau) + \varphi(\sigma, \tau) - \varphi(\sigma + d\sigma, \tau) - \varphi(\sigma, \tau + d\tau)$$

et, pour une aire S quelconque, on a

$$(22) \qquad \Phi|[S]| = \int\int_S d_\sigma d_\tau \varphi(\sigma, \tau),$$

l'application de cette formule nécessitant certaines précautions dans le cas où des masses finies sont situées sur le contour de S. On peut appeler cette fonction $\varphi(\sigma, \tau)$, dont la connaissance équivaut à celle de Φ, *fonction à variation bornée* des deux variables σ et τ.

A un point A où est située une masse finie a correspond évidemment pour la fonction φ une discontinuité égale à a sur les deux demi-droites parallèles aux axes partant de A et dirigées respectivement dans le sens des s croissants et dans le sens des t croissants.

Une parallèle à l'un des axes sur laquelle sont réparties des masses finies est également une ligne de discontinuité pour la fonction φ. Mais si de telles masses sont réparties sur une ligne C non parallèle aux axes, on voit aisément que φ n'est pas discontinue sur cette ligne, mais que seulement sa dérivée première (si elle existe) est discontinue. Si l'on se donnait une fonction φ discontinue sur cette ligne, la fonctionnelle additive qu'on en déduirait par la formule (22) ne serait pas à variation bornée.

On se rend compte que, si l'introduction de la fonction $\varphi(\sigma, \tau)$ est commode pour définir la fonctionnelle Φ, il eût été difficile de remplacer les considérations précédentes par des considérations ne faisant intervenir que la fonction φ et n'utilisant pas la notion de fonctionnelle. Les droites parallèles aux axes auraient dû jouer un rôle particulier et qui aurait paru artificiel.

33. Donnons maintenant des exemples de répartitions de masses correspondant au cinquième des termes que nous avons distingués dans Φ. Il suffit de prendre pour φ l'une des valeurs

$$\varphi(s, t) = x_3(s) y_3(t)$$

ou

$$\varphi(s, t) = x_3(s) f(t),$$

f étant une fonction continue et x_3 et y_3 étant des fonctions analogues aux fonctions φ_3 et x_3 du n° 28. Dans les deux cas, on est conduit à des masses réparties dans un ensemble de mesure superficielle nulle; dans le premier cas, il a en outre une mesure linéaire

nulle en projection sur les deux axes, tandis que, dans le second, il n'en est ainsi qu'en projection sur l'axe des s.

Considérons encore la répartition de masses positives définie de la manière suivante, à l'intérieur d'un carré. Divisant ce carré en neuf carrés égaux, nous répartirons le quart de la masse totale dans chacun des carrés ayant un côté commun avec le carré central; nous opérerons dans chacun de ces carrés comme dans le carré primitif, et ainsi de suite. On voit sans peine que les masses seront en fin de compte réparties dans un ensemble dont les projections sur les diagonales du carré primitif ont des mesures linéaires nulles, tandis que la projection sur les côtés de ce carré comprend au contraire tous les points de ces côtés.

On voit par cet exemple que le fait, pour un ensemble, d'avoir une mesure linéaire nulle ou non en projection sur une droite peut dépendre du choix de cette droite.

34. L'intégrale double de Stieltjes. — Soient Φ une fonctionnelle additive à variation bornée et $\psi(A)$ une fonction continue du point A. Divisons l'aire S en éléments d'aire DS et, dans chacun d'eux, choisissons un point A. La somme

$$\Sigma\, \psi(A)\, D\Phi,$$

$D\Phi$ étant la valeur de Φ pour chaque élément d'aire, tend, lorsque le nombre des aires élémentaires devient infini de manière que la plus grande distance de deux points d'un même élément tende vers o, vers une limite bien déterminée, indépendante du mode de décomposition choisi et du choix du point A; cette limite est l'intégrale double de Stieltjes et se représente par l'une des notations

$$(23) \qquad \int\int_S \psi(A)\, d\Phi\, |[S]| = \int\int_S \psi(A)\, d_s d_t \varphi(A),$$

s et t étant les coordonnées de A et $\varphi(A)$ étant la fonction associée à Φ par le procédé du n° 32.

Si l'on décompose Φ en cinq termes $\Phi_1, \ldots, \Phi_5$, comme nous l'avons fait n° 31, les trois premiers termes donneront des expressions de même forme que ceux que nous avons formés à propos de l'intégrale simple de Stieltjes; le quatrième donnera une intégrale de

M. Lebesgue de la forme

$$\int\int_S \psi(A)\mu(A)\,ds.$$

Le dernier terme

$$(24)\qquad \int\int_S \psi(A)\,d\Phi_5\,|[S]| = \int\int_S \psi(A)\,d_s\,d_t\,\varphi_5(A)$$

sera irréductible à l'une des formes précédentes. On peut, comme toute intégrale double, le ramener à deux quadratures successives. La première consistera, en principe, dans le calcul d'une intégrale de Stieltjes, et la deuxième sera de la forme

$$(25)\qquad \int dx(s),$$

$x(s)$ étant la valeur de l'intégrale analogue à (14) limitée aux points de S d'abscisse inférieure à s. Cette fonction est une fonction continue à variation bornée, qui, avec les notations du n° 28, est donc de la forme $x_2(s) + x_3(s)$. Cette séparation en deux termes correspond à une séparation des masses liées à la fonctionnelle Φ_5 en deux parties, les unes étant situées dans un ensemble de points dont la projection sur l'axe des s a une mesure linéaire nulle, les autres étant telles qu'aucune partie finie de ces masses ne soit dans un tel ensemble. Ce dernier terme, celui qui correspond à $x_2(s)$, conduit donc à une quadrature de Stieltjes suivie d'une quadrature de M. Lebesgue; l'autre conduit à deux quadratures de Stieltjes successives; mais il peut arriver, en ce qui le concerne, qu'un changement de variables le ramène à la forme du précédent, ou conduise à une nouvelle décomposition en deux termes.

CHAPITRE IV.

VARIATION PREMIÈRE ET FONCTIONNELLES LINÉAIRES.

SOMMAIRE. — Dérivée fonctionnelle. — *Le point de vue logique :* Définition précise de la variation première. — La formule de M. Hadamard. — La formule de M. Fr. Riesz. — Les fonctionnelles linéaires continues dans le champ des fonctions de carrés sommables. — Les fonctionnelles linéaires continues d'ordre p. — Les fonctionnelles dépendant d'une fonction de deux variables. — Les fonctionnelles bilinéaires. — Les correspondances linéaires entre deux fonctions. — *Le point de vue pratique :* Forme normale de la variation d'une fonctionnelle. — Cas de la continuité d'ordre p. — Les correspondances linéaires entre deux fonctions. — *Généralisations diverses :* Fonctionnelles dépendant des valeurs d'une fonction $x(t)$ pour des valeurs quelconques de t. — Fonctionnelles dépendant d'une fonction de n variables. — Fonctionnelles dépendant de plusieurs fonctions. — Fonctions d'une ligne gauche. — Fonctions d'une ligne plane et fonctions d'une surface. — Remarque sur le choix d'un type simple de fonctionnelles.

35. **Dérivée fonctionnelle.** — Nous avons déjà vu que la généralisation de l'expression de la différentielle totale d'une fonction de n variables conduit à représenter la variation d'une fonctionnelle U par l'intégrale

$$\delta U = \int_0^1 \varphi(t)\,\delta x(t)\,dt. \tag{1}$$

Cette forme n'est pas générale. La fonctionnelle $x(\tau)$, τ étant une valeur particulière de t, admet pour variation $\delta x(\tau)$, expression irréductible à la précédente. Le calcul des variations classique nous apprend que la fonctionnelle

$$\int_0^1 f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) dt$$

admet pour variation

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x'}\delta x\right]_0^1 + \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'}\right) dt \qquad \left(x' = \frac{dx}{dt}\right),$$

forme irréductible à la précédente si $\frac{\partial f}{\partial x'}\delta x$ ne s'annule pas aux deux limites.

Dans le cas où la formule (1) s'applique, nous dirons que la fonctionnelle U est *dérivable au sens de M. Volterra*. La fonction $\varphi(t)$ sera dite *dérivée fonctionnelle* de U. Comme elle dépend en général, non seulement de t, mais du choix de la fonction $x(t)$, M. Volterra la représente par

$$\varphi(\tau) = \mathrm{U}' \left| \left[x(\overset{1}{\underset{0}{t}}), \tau \right] \right|.$$

Il nous arrivera d'écrire plus simplement $\mathrm{U}'_{x(\tau)}$. La variable t ou τ, lorsque l'on considère une fonctionnelle U de $x(t)$, est un simple indice, analogue à celui qui indique la variable lorsque l'on considère une fonction $u(x_1, \ldots, x_n)$ de n variables; cette notation est donc analogue à la notation u'_{x_i} pour représenter la dérivée de u par rapport à x_i.

La formule (1) n'étant pas générale, une étude plus complète s'impose. Elle peut être faite à deux points de vue.

Le premier, que nous appellerons le *point de vue logique*, consiste à supposer la fonctionnelle U définie dans un champ fonctionnel, et, en faisant des hypothèses aussi peu restrictives que possible sur cette fonctionnelle, chercher une expression analytique capable de représenter sa variation.

Le deuxième, que nous appellerons le *point de vue pratique*, consiste à mettre en évidence les formes de variations qui ont des chances de se rencontrer dans les applications, et non seulement dans des exemples artificiellement formés.

Le second point de vue nous sera évidemment le plus utile pour le développement de la théorie. Le premier est d'une nature plus philosophique, et c'est une conséquence remarquable du développement, à notre époque, de l'esprit philosophique qui porte les savants à analyser les fondements de la Science, qu'il ait été considéré dès la naissance du calcul fonctionnel et plus rapidement que ne semblait le comporter le développement de cette science.

Nous allons nous placer successivement aux deux points de vue.

LE POINT DE VUE LOGIQUE.

36. **Définition précise de la variation première.** — Il faut avant tout savoir ce que nous appelons la *variation première* d'une fonctionnelle. Les remarques présentées jusqu'ici manquent évidemment de la précision désirable.

Dans le cas d'une fonction de n variables, la différentielle totale en un point A est définie par les deux propriétés suivantes :

1° Elle est une fonction linéaire de l'accroissement des coordonnées entre A et un point voisin B;

2° Elle diffère de l'accroissement de la fonction entre A et B d'une quantité dont le quotient par la distance AB est infiniment petit avec cette distance [1].

Passons au cas d'une fonctionnelle et cherchons à définir la variation par la généralisation de cette double propriété :

1° *La variation* δU *est une fonctionnelle linéaire de l'accroissement* $\delta x(t)$.

Qu'entendrons-nous par fonctionnelle linéaire (sous-entendre : et homogène) ? M. Hadamard [2] dit que U est une fonctionnelle linéaire de x si la relation

$$x(t) = \lambda x_1(t) + \mu x_2(t)$$

entre trois déterminations de $x(t)$ entraîne entre les déterminations correspondantes de U la relation

$$U = \lambda U_1 + \mu U_2.$$

2° *La variation* δU *diffère de l'accroissement de* U *d'une quantité dont le quotient par le module fonctionnel de l'accroissement de* x *est infiniment petit avec ce module.*

37. La notion de variation première apparaît ainsi, ce qui est naturel, comme liée à la définition de la distance, c'est-à-dire à celle

---

(1) *Voir* M. Fréchet, *Comptes rendus*, 27 mars 1911.

(2) *Comptes rendus*, février 1903, et *Leçons sur le Calcul des variations*, p. 288.

de continuité. C'est le point de vue qui a été adopté par M. Fréchet. On peut en donner une définition indépendante de la définition de distance en définissant la variation de U par la formule

$$(2) \qquad \delta U = \left\{ \frac{d}{d\lambda} U \,|\, [x + \lambda\, \delta x] \,| \right\}_{\lambda = 0}.$$

Une définition analogue a été adoptée par exemple par R. Gateaux dans l'étude des fonctions d'une infinité de variables indépendantes ([1]).

Y a-t-il identité entre les deux définitions ?

On voit sans peine qu'une variation au sens de M. Fréchet vérifie la formule (2) si la définition de la distance est telle que la distance des deux fonctions $x(t)$ et $x(t) + \lambda f(t)$ est proportionnelle à λ. Cette condition est vérifiée par toutes les définitions que nous avons considérées, et il semble qu'une définition qui ne la vérifierait pas serait sans intérêt.

Mais la définition de Gateaux est plus générale. L'expression (2) peut n'être pas une différentielle au sens de M. Fréchet.

1° D'une part, si elle est homogène et du premier degré en δx, elle peut n'être pas linéaire. Cette circonstance se rencontre déjà dans la théorie des fonctions de deux variables; la fonction $x \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}$ admet à l'origine une différentielle au sens de Gateaux, mais ce n'est pas une expression linéaire en dx et dy.

2° D'autre part, il résulte de la définition (2) que

$$(3) \qquad \frac{U_1 - U - \delta U}{m},$$

m désignant le module fonctionnel de δx, et δx étant de la forme $\lambda f(t)$, tend vers zéro quand λ tend vers zéro, $f(t)$ restant fixe. Pour que δU soit une différentielle au sens de M. Fréchet, il faut qu'elle tende vers zéro quand m tend vers o quelle que soit la forme de δx; autrement dit, si $\delta x = \lambda f(t)$, qu'elle tende uniformément vers o quand λ tend vers o, $f(t)$ étant une fonction quelconque de module fonctionnel égal à 1. Il peut ne pas en être ainsi, même si δU est une fonctionnelle linéaire.

Donc la formule (2) est plus générale que la définition précédente.

([1]) *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1919.

Toutes les fois qu'il y a une variation au sens de M. Fréchet, elle s'applique; mais elle peut représenter une expression qui ne soit pas une variation au sens de M. Fréchet.

Dans la suite, lorsque nous dirons qu'une fonctionnelle admet une variation, sans ajouter « au sens de M. Fréchet ». nous entendrons par là que l'expression (2) existe et est linéaire en δx. Cette définition diffère donc de celle de Gateaux parce que nous imposons à la variation la condition d'être linéaire, et de celle de M. Fréchet par la différence signalée au 2° ci-dessus.

38. Donnons un exemple de fonctionnelle n'admettant pas une variation pour toutes les fonctions $x(t)$.

Plaçons-nous dans le champ des fonctions continues et appelons distance de deux fonctions x et y le maximum de $|y(t) - x(t)|$. Prenons comme fonctionnelle U le maximum de $x(t)$.

Si $x(t)$ n'atteint son maximum que pour une valeur τ de la variable t, cette fonctionnelle admet comme variation l'expression $\delta x(\tau)$. Mais si $x(t)$ atteint son maximum pour deux valeurs τ et τ' de la variable t, la valeur principale de l'accroissement de U est donnée par $\delta x(\tau)$ ou $\delta x(\tau')$ suivant que l'une ou l'autre de ces quantités est la plus grande. Si, par exemple, δx est de la forme $\lambda f(t)$, et si $f(\tau)$ et $f(\tau')$ ne sont pas égaux, la valeur à considérer. τ ou τ', changera avec le signe de λ. Si donc on considère la famille de fonctions $x(t) + \lambda f(t)$ dépendant du paramètre λ, U sera représentée en fonction de λ par une courbe ayant un point anguleux.

De pareils exemples, ou même ceux qu'on pourrait donner généralisant les fonctions sans dérivées, ne diminuent d'ailleurs en rien l'intérêt qui s'attache à la notion de variation.

39. Démontrons maintenant deux propriétés des fonctionnelles linéaires.

1° Si une fonctionnelle linéaire V est continue en un point de l'espace fonctionnel, elle est continue partout.

En effet, dire qu'elle est continue en un point $x(t)$, cela signifie que

$$U|[x + \delta x]| - U|[x]| = U|[\delta x]|$$

tend vers o avec le module fonctionnel de δx; cette condition est évidemment indépendante du point considéré.

2° Cela revient au même de dire d'une fonctionnelle linéaire qu'elle est continue, ou de dire qu'elle est finie dans tout champ fonctionnel fini.

En effet, dire qu'elle est finie dans tout champ fonctionnel fini revient à dire que

$$||x(t)|| < M \quad \text{entraîne} \quad \text{mod}\, U\,|[x]| < K.$$

Il est évident, U étant linéaire, que si l'on multiplie M par un facteur ρ, K est multiplié par le même facteur. On peut donc choisir M assez petit pour que K soit inférieur à tout nombre positif donné, c'est-à-dire que U est continu au point $x = 0$ et, par suite, en tout point.

Une variation, qui est une fonctionnelle linéaire de δx, n'est pas nécessairement continue par rapport à cet argument. Mais on peut montrer que, si U est une fonctionnelle continue de x, δU est une fonctionnelle continue de δx. En effet, le module fonctionnel m de $\delta x = x_1 - x$ tendant vers zéro, l'accroissement $U_1 - U$ tend vers zéro, par définition de la continuité; d'autre part, par définition de la variation, l'expression (3) et, par suite, son numérateur $U_1 - U - \delta U$ tendent vers zéro. Donc δU tend vers zéro. Cette fonctionnelle est donc continue à l'origine et, par suite, en tout point.

40. La formule de M. Hadamard. — M. Hadamard, dans sa Note déjà citée de 1903, a le premier posé et résolu le problème de chercher une expression analytique susceptible de représenter toutes les fonctionnelles linéaires continues.

Remarquons d'abord avec lui que la propriété d'addition des fonctionnelles linéaires se généralise immédiatement au cas d'un nombre quelconque de fonctions, de sorte que la relation

$$x(t) = a_1 x_1(t) + \ldots + a_n x_n(t) \tag{5}$$

entraîne, si U est linéaire, la relation

$$U\,|[x(t)]| = a_1 U\,|[x_1(t)]| + \ldots + a_n U\,|[x_n(t)]|.$$

Supposons la fonctionnelle U définie et bornée pour toutes les fonctions $x(t)$ continues, et ayant, par suite, d'après le n° 39, la continuité liée au voisinage uniforme de deux fonctions; si donc $x(t)$ tend *uniformément* vers une limite $X(t)$, $U|[x(t)]|$ tend vers $U|[X(t)]|$.

Appliquons ce résultat à l'expression (5), en supposant qu'à la limite, la suite $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ soit remplacée par une fonction continue $x_\lambda(t)$ de t et d'un paramètre λ, et que cette expression devienne une intégrale. Nous voyons que la relation

$$X(t) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\lambda) x_\lambda(t)\, d\lambda$$

entraîne la relation

$$U\,|\,[X(t)]\,| = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\lambda)\, U\,|\,[x_\lambda(t)]\,|\, d\lambda.$$

En particulier, la relation

$$x_\mu(t) = \frac{\int_0^1 e^{-\mu^2(\lambda-t)^2} x(\lambda)\, d\lambda}{\int_0^1 e^{-\mu^2(\theta-t)^2} d\theta}$$

entraîne la relation

$$U\,|\,[x_\mu(t)]\,| = \int_0^1 F(\lambda, \mu) x(\lambda)\, d\lambda,$$

en posant

$$F(\lambda, \mu) = \frac{U\,|\,[e^{-\mu^2(\lambda-t)^2}]\,|}{\int_0^1 e^{-\mu^2(\theta-t)^2} d\theta}.$$

Or, pour μ infini, $x_\mu(t)$ tend *uniformément* [1] vers $x(t)$. Il vient donc

$$U\,|\,[x(t)]\,| = \lim_{\mu=\infty} \int_0^1 F(t, \mu) x(t)\, dt. \tag{6}$$

Telle est l'expression analytique, formée par M. Hadamard, qui

---

[1] La fonction $x(t)$ étant continue, donc uniformément continue, on peut choisir η de manière que $|\tau - t| < \eta$ entraîne $|x(\tau) - x(t)| < \varepsilon$. Or, pour μ assez grand, une fraction égale à $1 - \varepsilon$ de l'intégrale I, qui est au dénominateur, est obtenue pour un intervalle d'intégration constitué par une partie de l'intervalle $(t - \eta, t)$ et $(t + \eta, t)$. Les deux parties de l'intégrale ainsi distinguées, égales à $(1 - \varepsilon)$ I et ε I, sont multipliées respectivement, si l'on multiplie la fonction intégrée par $x(\theta)$, par $x(\tau)$ et $x(\tau')$, τ et τ' étant compris dans les deux parties de l'intervalle $(0, 1)$. Or $x(\tau)$ est de la forme $x(t) + \theta_1 \varepsilon$, où $|\theta_1| < 1$, et $x(\tau') = \theta_2 M$, où $|\theta_2| < 1$ et où M est le maximum de $|x(t)|$. Donc $x_\mu(t)$ a la valeur

$$(1 - \varepsilon)\,[x(t) + \theta_1 \varepsilon] + \varepsilon \theta_2 M,$$

et sa différence avec $x(t)$ est bien aussi petite qu'on veut, dans tout l'intervalle $(0, 1)$, pour ε assez petit.

représente la fonctionnelle linéaire et continue la plus générale définie dans le champ des fonctions continues. Elle est évidemment beaucoup plus générale que l'intégrale de M. Volterra. Elle est même, à certains points de vue, trop générale. Il est évident qu'une fonctionnelle qui peut être représentée par la formule (6) peut l'être d'une infinité de manières, en faisant varier le choix de la fonction $F(t, \mu)$. Il y a intérêt à chercher une représentation ne comportant pas cette indétermination. Un tel résultat a été obtenu par M. Fr. Riesz (*Comptes rendus*, 29 novembre 1909).

41. La formule de M. Fr. Riesz. — Faisons sur la fonctionnelle U les mêmes hypothèses que précédemment et, de plus, supposons-la définie pour les fonctions ayant un nombre fini de discontinuités de première espèce. Soit $x_\tau(t)$ la fonction égale à 1 si $t \leqq \tau$ et à 0 si $t > \tau$. Posons

$$U[[x_\tau(t)]] = f(\tau).$$

Si $\tau > \tau'$, $x_\tau - x_{\tau'}$ représente une fonction égale à 1 si $\tau' < t \leqq \tau$ et à 0 pour les autres valeurs. Pour cette fonction, U a évidemment la valeur $f(\tau) - f(\tau')$.

Il en résulte aisément que $f(t)$ est à variation bornée. Soit, en effet, M le module maximum de U pour les fonctions $x(t)$ de module $\leqq 1$ (ce maximum existe, en vertu de l'hypothèse de la continuité). Considérons en particulier une fonction égale à $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$ dans chacun des intervalles $(0, t_1)$, (t_1, t_2), $\ldots$, $(t_{p-1}, 1)$, les ε étant tous égaux à $+1$ ou à -1, et les t étant des nombres croissants dans l'intervalle $(0, 1)$. Pour cette fonction, U a la valeur

$$\varepsilon_1[f(t_1) - f(0)] + \varepsilon_2[f(t_2) - f(t_1)] + \ldots + \varepsilon_p[f(1) - f(t_{p-1})],$$

qui, pour un choix convenable des ε, devient

$$|f(t_1) - f(0)| + |f(t_2) - f(t_1)| + \ldots + |f(1) - f(t_{p-1})|.$$

Cette expression étant au plus égale à M, quel que soit le choix des t, $f(t)$ est à variation totale au plus égale à M, donc bornée.

Ce résultat obtenu, nous pouvons représenter d'une manière approchée une fonction continue $x(t)$ par une fonction $X(t)$ égale dans chacun des intervalles (t_{i-1}, t_i) à une des valeurs x_i de $x(t)$ dans cet intervalle. Si le plus grand de ces intervalles tend vers zéro, $X(t)$ tend d'une manière uniforme vers $x(t)$.

Or on a, en raison de la propriété caractéristique des fonctionnelles linéaires,

$$U\,|\,[X(t)]\,| = \sum_i x_i[f(t_i) - f(t_{i-1})],$$

et, à la limite, on peut écrire

$$(7) \qquad U\,|\,[x(t)]\,| = \int_0^1 x(t)\,df(t).$$

Les fonctionnelles considérées sont donc représentables par une intégrale de Stieltjes. Cette représentation ne comporte pas l'indétermination de la représentation par la formule de M. Hadamard et se distingue aussi de cette formule par le fait qu'elle ne représente pas d'autres fonctionnelles que celles ayant la continuité considérée.

On obtient une autre expression de la fonctionnelle linaire U en utilisant la décomposition de l'intégrale de Stieltjes indiquée au n° 31. On trouve ainsi

$$(8) \qquad U\,|\,[x(t)]\,| = \sum_i a_i x(\tau_i) + \int_0^1 x(t)\mu(t)\,dt + \int_0^1 x(t)\,d\varphi(t),$$

$\Sigma|a_i|$ étant convergente, $\mu(t)$ étant sommable et $\varphi(t)$ étant à variation bornée, continue, et ayant toute sa variation concentrée dans un ensemble de mesure nulle.

42. Nous avons supposé jusqu'ici que U était défini pour les fonctions admettant un nombre fini de discontinuités de première espèce. Il est d'ailleurs à noter qu'avec cette hypothèse, et si $x(t)$ est discontinue en l'un des τ_i, il est essentiel, pour l'application des formules (7) et (8), que la signification de $x(\tau_i)$ soit bien précisée.

Nous allons supprimer cette hypothèse et montrer qu'on arrive au même résultat en supposant U définie seulement dans le champ des fonctions continues.

Nous dirons qu'un point τ est un *point ordinaire* pour la fonctionnelle linéaire U si, étant donné ε positif, on peut toujours déterminer η tel que l'hypothèse qu'une fonction continue $x(t)$ soit nulle en dehors de l'intervalle $(\tau - \eta, \tau + \eta)$ et comprise entre -1 et $+1$ dans cet intervalle, entraîne $|U| < \varepsilon$. Dans le cas contraire, τ sera dit *point de discontinuité*, et nous appellerons *écart* correspondant à ce point la limite supérieure des valeurs de ε pour lesquelles n'existe

pas de nombre η. Cet écart étant désigné par a, nous pouvons alors affirmer que, quelque petits que soient les nombres positifs ε et η, on peut trouver une fonction continue $x(t)$, nulle en dehors de l'intervalle $(\tau - \eta, \tau + \eta)$ et comprise entre -1 et $+1$ dans cet intervalle, et à laquelle corresponde une valeur de U positive et supérieure à $a - \varepsilon$.

Je dis maintenant que les points de discontinuité sont dénombrables et que la somme des écarts correspondants est au plus égale à M, limite supérieure de U pour les fonctions de module $\leqq 1$. Il suffit de montrer que l'on ne peut pas avoir, pour un nombre fini de points de discontinuité, $\tau_1, \ldots, \tau_p$,

$$a_1 + \ldots + a_p = M' > M.$$

S'il en était ainsi, nous pourrions choisir $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p$ tels que

$$\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_p \leqq M' - M,$$

et $\eta_1, \ldots, \eta_p$ tels que les intervalles $(\tau_i - \eta_i, \tau_i + \eta_i)$ soient extérieurs les uns aux autres. A chacun de ces intervalles, on pourrait faire correspondre une fonction continue $x_i(t)$, nulle en dehors de cet intervalle, et comprise entre -1 et $+1$ dans cet intervalle, et pour laquelle la fonctionnelle U prenne une valeur U_i positive et supérieure à $a_i - \varepsilon_i$. Pour la fonction

$$x(t) = x_1(t) + \ldots + x_p(t),$$

qui est continue et comprise entre -1 et $+1$, la fonctionnelle prendrait la valeur

$$U_1 + \ldots + U_p > M,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. Il en résulte bien que la somme des a_p ne peut dépasser M et, par suite, que les τ_p sont dénombrables.

Soit maintenant un point ordinaire τ. Soit $x_\tau(t)$ la fonction déjà considérée égale à 1 pour $t \leqq \tau$ et à 0 pour $t > \tau$. Je dis que, malgré sa discontinuité, U est défini pour cette fonction. En effet, on peut modifier x_τ dans un intervalle très petit $(\tau - \eta, \tau + \eta)$ de manière à rendre cette fonction continue et comprise entre 0 et 1, et, pourvu que η soit assez petit, aux différentes fonctions que l'on peut ainsi obtenir correspondent des valeurs de U différant les unes des autres

de moins que tout nombre donné ε. Il en résulte bien que, η tendant vers zéro, U a une limite. Soit $f(\tau)$ cette limite.

Cette fonction étant obtenue, nous pouvons reprendre les raisonnements du n° 41 en spécifiant seulement que la fonction $X(t)$ par laquelle nous représentons $x(t)$ d'une manière approchée aura des points de discontinuité t_i qui seront tous des points ordinaires de la fonctionnelle. On voit d'ailleurs aisément que $f(t)$ est à variation bornée, de sorte qu'il n'y a rien de changé aux résultats précédents; les quantités que nous désignons par a_i sont, au signe près seulement, celles que nous avions désignées de cette manière au n° 41.

43. Les fonctionnelles linéaires continues dans le champ des fonctions de carrés sommables. — Supposons maintenant la fonctionnelle linéaire U définie et bornée dans le champ des fonctions de carrés sommables, et par suite, d'après le n° 39, continue, avec la définition de la continuité qui est naturelle dans ce champ, celle liée au voisinage en moyenne.

Une telle fonctionnelle est *a fortiori* définie et bornée dans le champ des fonctions continues et, par suite, représentable par les formules (7) et (8). Mais la continuité plus restrictive que nous considérons actuellement entraîne cette conséquence qu'on ne risque pas de changer la valeur de U en changeant $x(t)$ pour les points d'un ensemble de mesure nulle; il n'en serait certainement pas ainsi si U contenait effectivement le premier ou le troisième terme de la formule (8). Cette formule se réduit donc au second terme, et l'on a

$$(9) \qquad U[[x(t)]] = \int_0^1 x(t)\mu(t)\,dt,$$

la fonction $\mu(\tau)$ étant sommable.

Je dis qu'elle est même de carré sommable. Si, en effet, l'intégrale

$$F(\xi) = \int_0^\xi \xi^2\,df(\xi),$$

$f(\xi)$ désignant la fonction sommatoire de $\mu(t)$ dans l'intervalle (0, 1), devenait infinie (soit positivement, pour ξ infini positif, soit négativement, pour ξ infini négatif), on pourrait trouver une fonction $X(t)$ de carré sommable et pour laquelle l'intégrale (9) n'aurait pas de

sens. Il suffit de prendre

$$X(t) = \frac{\mu(t)}{F[\mu(t)] + \varepsilon},$$

avec $\varepsilon = \pm 1$ suivant que $\mu(t)$ est positif ou négatif. On a, d'après les formules de M. Lebesgue,

$$\int_0^1 X^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi^2\,df(\xi)}{[F(\xi)+\varepsilon]^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dF(\xi)}{[F(\xi)-1]^2} + \int_0^{\infty} \frac{dF(\xi)}{[F(\xi)+1]^2},$$

$$U[[X(t)]] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi^2\,df(\xi)}{F(\xi)+\varepsilon} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dF(\xi)}{F(\xi)-1} + \int_0^{\infty} \frac{dF(\xi)}{F(\xi)+1},$$

formules qui montrent bien que le module fonctionnel de $X(t)$ est borné, mais que l'intégrale (9) n'a pas de sens pour cette fonction. On peut alors trouver des fonctions continues $x(t)$, convergeant en moyenne vers $X(t)$, et telles que les valeurs correspondantes de U, bien définies par la formule (9), n'aient pas de limite; ce résultat est en contradiction avec l'hypothèse que U soit défini et continu pour la fonction $X(t)$; c'est donc que $\mu(t)$ est de carré sommable.

Cette condition étant remplie, il résulte de l'inégalité de Schwarz que l'expression (9) représente bien une fonctionnelle linéaire, définie et continue dans le champ des fonctions de carrés sommables. Nous avons ainsi l'expression générale d'une telle fonctionnelle.

Ce résultat est dû à M. Fréchet, qui l'a d'ailleurs établi sans utiliser l'intégrale de Stieltjes (*voir* n° 99).

44. Les fonctionnelles linéaires et continues d'ordre p. — Appelons C_p le champ des fonctions continues, ayant des dérivées *absolument continues* (*voir* n° 28) jusqu'à l'ordre $p-1$, et une dérivée d'ordre p de carré sommable. En d'autres termes, c'est le champ des fonctions de la forme

$$(10)\qquad x(t) = x(\tau) + (t-\tau)x'(\tau) + \ldots + \frac{(t-\tau)^{p-1}}{(p-1)!}x^{(p-1)}(\tau) + \int_\tau^t \frac{(t-s)^{p-1}}{(p-1)!}x^{(p)}(s)\,ds,$$

$x^{(p)}(s)$ étant de carré sommable. Appelons C'_p le champ obtenu en supposant de plus que cette dérivée soit continue.

Considérons une fonctionnelle linéaire U définie dans C_p et ayant dans ce champ la continuité liée au voisinage en moyenne d'ordre p,

ou bien (deuxième hypothèse) définie dans C'_p et ayant dans ce champ la continuité liée au voisinage uniforme d'ordre p. Il résulte de ces hypothèses et de la formule (10) que

$$(11) \qquad U|[x]| = a_0 x(\tau) + a_1 x'(\tau) + \ldots + a_{p-1} x^{(p-1)}(\tau) + V|[x^{(p)}]|,$$

V étant une fonctionnelle linéaire continue d'ordre zéro à laquelle, suivant qu'on fait sur U l'une ou l'autre des hypothèses ci-dessus, on peut appliquer la formule de M. Fréchet ou celle de M. Fr. Riesz.

Dans le premier cas, par exemple, et pour $p = 1$, il vient

$$(12) \qquad U|[x]| = a_0 x(\tau) + \int_0^1 x'(t)\mu(t)\,dt.$$

Si la fonction μ est à variation bornée, cette expression est continue d'ordre zéro et se ramène par une intégration par parties à la forme

$$U|[x]| = a_0 x(\tau) + [x(t)\mu(t)]_0^1 - \int_0^1 x(t)\,d\mu(t).$$

identique, aux notations près, à celle de M. Riesz. Mais si $\mu(t)$ n'est pas à variation bornée, la formule (12) représente une fonctionnelle plus générale.

Des circonstances tout à fait différentes se présentent pour la formule de M. Hadamard, qui peut représenter toutes les fonctionnelles considérées actuellement et dont, par suite, la généralité n'augmente pas si l'on y remplace $x(t)$ par $x^{(p)}(t)$. Cela tient à ce que, si $x(t)$ a des dérivées continues jusqu'à l'ordre p, $x_\mu(t)$ pour μ infini a avec $x(t)$ un voisinage uniforme d'ordre p et, par suite, $U||x_\mu(t)||$ a encore pour limite $U|[x(t)]|$.

D'ailleurs, si l'on écrit $x^{(p)}(t)$ au lieu de $x(t)$ dans la formule (6), il est aisé de ramener la nouvelle forme obtenue à la forme initiale.

On voit donc que cette formule est beaucoup plus générale que les fonctionnelles que nous avons voulu représenter par elle. On peut montrer qu'elle représente, non seulement toutes les fonctionnelles ayant une continuité d'ordre fini p, mais même des fonctionnelles ayant une continuité d'ordre infini comme celle que nous avons formée (n° 12). Si elle présente l'inconvénient de ne pas donner des fonctionnelles qu'elle représente une représentation unique, elle présente l'avantage d'une extrême généralité.

45. **Les fonctionnelles dépendant d'une fonction de deux variables.** — Nous indiquerons à la fin de ce Chapitre diverses généralisations. Il faut dès maintenant que nous considérions les fonctionnelles U dépendant des valeurs prises par une fonction $x(s, t)$ de deux variables s et t dans le champ

$$(13) \qquad 0 \leqq s \leqq 1, \qquad 0 \leqq t \leqq 1.$$

Il est à remarquer qu'on n'augmenterait pas la généralité en prenant un champ de forme quelconque intérieur à ce carré, et par suite un champ fini quelconque.

La formule (1) se généralise sans difficulté et s'écrit

$$\delta U = \int_0^1 \int_0^1 \varphi(s, t) \delta x(s, t)\, ds\, dt.$$

Les formules de MM. Hadamard, Riesz et Fréchet se généralisent aussi sans difficulté. Précisons-le en ce qui concerne ces deux dernières.

Soit U une fonctionnelle linéaire de $x(s, t)$ définie dans le champ des fonctions continues et ayant la continuité liée au voisinage uniforme d'ordre zéro; appelons $\Phi[[S]]$ sa valeur pour une fonction égale à 1 dans une aire S intérieure au carré (13), et à 0 en dehors de cette aire. La fonctionnelle U étant linéaire, Φ est une fonctionnelle additive, et sa variation, limite supérieure de

$$\Sigma\, |\, D\Phi\, | = \Sigma\, \xi\, D\Phi,$$

ξ ayant la valeur $+1$ ou -1 dans les différentes aires DS suivant le signe $D\Phi$, est au plus égale à la limite supérieure de U pour les fonctions $x(s, t)$ dont le module est partout égal à 1; elle est, par suite, bornée. Nous appellerons $\varphi(s, t)$ la fonction liée à Φ, comme il a été indiqué n° 32.

On généralise alors sans peine les raisonnements qui conduisent à la formule de M. Riesz et il vient

$$(14) \qquad U = \int\int x(s, t)\, d\Phi = \int\int x(s, t)\, d_s d_t \varphi(s, t),$$

les quadratures étant étendues au carré (13).

46. Supposons maintenant U définie dans le champ des fonctions

de carrés sommables et ayant la continuité liée au voisinage en moyenne d'ordre o. La formule (14), déduite d'hypothèses moins restrictives, s'applique *a fortiori*. Mais, dans la répartition de masses liée à la fonctionnelle Φ, il ne peut ici y avoir de masse finie dans un ensemble de mesure superficielle nulle; si, en effet, il n'en était pas ainsi, on changerait Φ en changeant $x(s, t)$ dans cet ensemble, ce qui est contraire à l'hypothèse de la continuité. La fonctionnelle Φ se réduit alors au terme Φ_4 (*voir* n° 31), et il vient

$$(15) \qquad U = \int_0^1 \int_0^1 x(s, t)\mu(s, t)\, ds\, dt.$$

Cette expression devant être finie pour toute fonction $x(s, t)$ de carré sommable, on voit, en raisonnant comme nous l'avons fait n° 43, que $\mu(s, t)$ doit être de carré sommable.

La formule (15), où μ est de carré sommable, donne alors l'expression générale des fonctionnelles considérées. Elle généralise celle de M. Fréchet.

47. **Les fonctionnelles bilinéaires.** — Considérons une fonctionnelle U dépendant de deux fonctions $x(s)$ et $y(t)$ définies toutes deux dans l'intervalle (o, 1), et qui soit fonctionnelle linéaire de chacune d'elles. On dit qu'elle est bilinéaire.

Supposons-la définie dans le champ des fonctions continues et ayant la continuité liée au voisinage uniforme d'ordre o. En appelant $\varphi(\sigma, \tau)$ la valeur de U lorsque $x(s)$ est une fonction égale à 1 pour $s < \sigma$ et nulle pour $s \geqq \sigma$, et lorsque $y(t)$ est une fonction égale à 1 pour $t < \tau$ et nulle pour $t \geqq \tau$, on arrive, par une nouvelle généralisation des raisonnements de M. Riesz, à la formule

$$(16) \qquad U\,[x(s), y(t)] = \int_0^1 \int_0^1 x(s)y(t)\, d_s\, d_t\, \varphi(s, t),$$

la fonction $\varphi(s, t)$ étant liée à une fonctionnelle additive à variation bornée.

48. Supposons maintenant U définie dans le champ des fonctions de carrés sommables et ayant la continuité liée au voisinage en moyenne d'ordre zéro. Si la formule (16) ressemblait à la formule (14), il va y avoir ici une différence avec la formule (15). La

répartition des masses liées à la fonction $\varphi(s, t)$ peut ici être telle que des masses finies soient situées sur un ensemble de mesure superficielle nulle, pourvu qu'en projection sur chacun des deux axes il ait une mesure linéaire non nulle. En se reportant à la décomposition en cinq termes de la fonctionnelle Φ liée à $\varphi(s, t)$ (n° 31), nous voyons ici que nous pouvons trouver :

1° Des masses (correspondant au terme Φ_2), réparties sur des lignes *non parallèles aux axes*, et exprimable par une intégrale de M. Lebesgue étendue à ces courbes;

2° Des masses (correspondant au terme Φ_4), réparties sur toute la surface et exprimable par une intégrale double de M. Lebesgue;

3° Des masses (correspondant au terme Φ_5), réparties dans un ensemble de mesure superficielle nulle sans qu'aucune masse finie soit répartie sur une courbe, ni dans un ensemble dont la projection sur l'un des axes ait une mesure linéaire nulle. De cette dernière condition résulte que les fonctionnelles linéaires Φ_5 que nous pouvons envisager ici sont plus particulières que celles du n° 31. Le calcul de l'intégrale double de Stieltjes à laquelle nous sommes conduits ici se ramène, quelle que soit celle des variables s et t par laquelle on commence l'intégration, au calcul d'une intégrale simple de Stieltjes suivi d'une intégrale de M. Lebesgue (*voir* n° 34, remarque finale).

Ainsi, en se reportant aux exemples du n° 33, on voit que le troisième donne une fonction Φ_5 convenant au problème actuel, mais qu'il n'en est pas de même des deux premiers.

Mais ces conditions ne suffisent pas encore pour que U soit fini pour tout système de fonctions $x(s)$ et $y(t)$ de carré sommable. Remarquant que le produit $x(s)y(t)$ est de carré sommable lorsqu'il s'agit d'une intégrale double, mais que, intégré le long d'une courbe du plan des s, t, il est seulement sommable, on voit sans peine que :

1° Pour les masses réparties sur des lignes, il faut et il suffit que, si l'on considère toutes ces masses comme positives et qu'on les projette successivement sur les deux axes, les répartitions obtenues aient une densité bornée;

2° Pour les masses réparties sur la surface, il faut et il suffit que leurs densités soient de carrés sommables;

3° Il est plus difficile de donner une forme simple à la condition

que doivent vérifier en plus de celles déjà indiquées les masses correspondant au terme Φ_3. Contentons-nous de montrer par un exemple que ces masses peuvent exister effectivement.

Posons

$$s + t = u, \qquad s - t = v,$$

et désignons par $f(u, v)$ une fonction continue et par $x_3(v)$ une fonction continue à variation bornée ayant toute sa variation dans un ensemble de mesure nulle. La répartition de masses vérifiant cette condition qu'un petit rectangle de côtés du et dv parallèles aux axes des u et des v contienne des masses $f(u, v)\, du\, dx_3(v)$, remplit les conditions voulues. On voit sans peine que, Φ étant la fonctionnelle correspondant à cette condition, l'intégrale

$$\int\int x(s)\, y(t)\, \mathrm{D}\Phi$$

étendue au carré (13) est continue dans le champ des fonctions x et y de carrés sommables.

49. Les correspondances linéaires entre deux fonctions. — Le problème des transformations ponctuelles, si important dans l'espace à n dimensions en vue de la théorie des changements de variables, se généralise au cas de l'espace fonctionnel; en n'employant plus le langage géométrique, ce problème généralisé est celui de la correspondance entre deux fonctions. Pour appliquer la notion de variation à la relation qui exprime une telle correspondance, il faut d'abord étudier le cas d'une correspondance linéaire.

Un exemple classique d'une telle correspondance est celle qui existe entre la valeur sur un contour d'une fonction harmonique représentable à l'intérieur de ce contour par un potentiel de double couche, et la densité de ce potentiel.

Considérons, d'une manière générale, une fonction $X(t)$ dépendant linéairement d'une autre fonction $x(t)$, et ne faisons, pour le moment, aucune hypothèse sur la possibilité de résoudre par rapport à $x(t)$ la relation qui existe entre ces deux fonctions.

Supposons d'abord qu'à toute fonction continue $x(t)$ corresponde une fonction continue $X(t)$, et qu'à deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ ayant un voisinage uniforme d'ordre zéro correspondent deux fonctions $X(t)$ et $Y(t)$ ayant aussi un voisinage uniforme d'ordre zéro.

Pour chaque valeur de s, $X(s)$ est alors une fonctionnelle linéaire et continue de $x(t)$ à laquelle nous pouvons appliquer la formule de M. Riesz, ce qui donne

$$X(s) = \int_0^1 x(t)\, d_t f(s, t), \tag{21}$$

$f(s, t)$ étant une fonction de t à variation bornée.

Il faut de plus que $X(s)$ soit une fonction continue de s, quelle que soit la fonction continue $x(t)$. La condition que doit remplir la fonction $f(s, t)$ pour qu'il en soit ainsi peut être mise sous la forme suivante : par tout point A de coordonnées s, t telles que

$$0 \leqq s \leqq 1, \qquad 0 \leqq t \leqq 1, \tag{22}$$

on peut faire passer un petit arc de courbe sur lequel s soit constamment croissant et sur lequel $f(s, t)$ soit une fonction continue. Cet arc devra être défini de part et d'autre du point A, sauf bien entendu si, en ce point, s a l'une des valeurs extrêmes 0 ou 1.

Il pourra d'ailleurs arriver que cet arc ne puisse pas dépasser un point B très voisin de A, comme nous allons le montrer par un exemple, sans donner la démonstration générale du résultat précédent.

Soit C une courbe fermée convexe intérieure au carré (22), sur laquelle s atteigne son minimum s_1 en un seul point B_1 et son maximum s_2 en un seul point B_2. Appelons t' et t'', $(t' < t'')$ les ordonnées des points où la droite d'abscisse s coupe la courbe C, s étant compris entre s_1 et s_2. Posons

$$X(s) = x(t') - x(t'') \qquad (s_1 < s < s_2),$$

et $X(s) = 0$ si s n'est pas compris entre s_1 et s_2. Cette fonction est bien de la forme (21), la fonction $f(s, t)$ étant égale à 1 à l'intérieur de C, et nulle sur cette courbe et aux points B_1 et B_2.

Pour tout point A intérieur à C, l'arc de courbe considéré, où s croît et où $f(s, t)$ est continue, existe bien, mais il ne peut pas dépasser B_1 et B_2. En ces points, il existe encore, puisqu'on peut définir un arc partant de chacun de ces points et extérieur à la courbe et sur lequel s soit croissant.

50. Supposons maintenant la correspondance linéaire entre $x(t)$ $X(t)$ telle qu'à toute fonction $x(t)$ de carré sommable corresponde une fonction $X(t)$ de carré sommable, et qu'à deux fonctions $x(t)$

et $y(t)$ ayant un voisinage en moyenne d'ordre zéro correspondent deux fonctions $X(t)$ et $Y(t)$ ayant aussi un voisinage en moyenne d'ordre zéro.

Nous ne pouvons pas ici partir de la formule de M. Fréchet comme nous sommes partis de celle de M. Riesz pour écrire la formule (21). En effet, $X(s)$, pour une valeur déterminée de s, est bien une fonctionnelle linéaire de $x(t)$, mais non nécessairement finie; on peut même dire qu'elle n'est pas bien définie, puisque (n° 21) on ne peut pas toujours définir la valeur d'une fonction mesurable pour une valeur particulière de la variable, et qu'une telle fonction doit être considérée comme connue lorsque l'on connaît sa fonction sommatoire et qu'on sait effectuer sur elle les opérations d'intégration.

Considérons alors l'intégrale

$$U = \int_0^1 X(s)\,y(s)\,ds.$$

Dire que $X(s)$ est de carré sommable équivaut à dire que U est finie pour toute fonction $y(s)$ de carré sommable, et la connaissance de cette intégrale pour toutes les déterminations possibles de $y(s)$ équivaut à celle de $X(s)$.

Or U est une fonctionnelle bilinéaire de x et y à laquelle nous pouvons appliquer les résultats du n° 48. Par ce détour, on peut dire qu'on a défini la correspondance linéaire la plus générale entre deux fonctions de carrés sommables.

On peut aussi prendre pour $y(t)$, non une fonction quelconque de carré sommable, mais seulement les fonctions trigonométriques $\cos 2n\pi t$ et $\sin 2n\pi t$. X est alors défini par ses coefficients en série de Fourier, qui sont des fonctionnelles continues représentables par la formule de M. Fréchet.

Nous reviendrons au Chapitre VIII sur ces correspondances et nous étudierons le problème de la résolution par rapport à x de la relation entre x et X.

LE POINT DE VUE PRATIQUE.

51. Forme normale de la variation d'une fonctionnelle. — Au point de vue pratique, l'intérêt des résultats précédents ne doit pas être exagéré. Nous ne rencontrerons pas dans les applications d'exemples

d'intégrales de Stieljes qui ne puissent se remplacer par des symboles d'un emploi plus commode. Il y a donc intérêt, si l'on veut étudier les équations aux dérivées fonctionnelles, à ne pas s'attacher à mettre en évidence les formes des fonctionnelles les plus générales, mais à prendre pour objet de notre étude celles qui peuvent se rencontrer dans les applications.

A ce point de vue, nous pouvons dire que la forme habituelle de la variation d'une fonctionnelle continue d'ordre zéro est

$$\delta U = \sum_i a_i \, \delta x(\tau_i) + \int_0^1 \varphi(t) \, \delta x(t) \, dt, \tag{23}$$

l'intégrale étant une intégrale ordinaire. Il n'y a pas à tenir compte des autres termes de la formule (8).

La variation d'une fonctionnelle comprend ainsi deux parties, d'une part une intégrale de M. Volterra, d'autre part des termes indiquant une dépendance spéciale de U par rapport aux valeurs de la fonction $x(t)$ en certains points particuliers. Il y a avantage pour la théorie générale à supposer que ces points n'existent pas; nous dirons dans ce cas que la fonctionnelle considérée est *normale*. Dans les applications où de tels points existeraient, il serait possible d'utiliser quand même les résultats obtenus en considérant la fonctionnelle étudiée comme dépendant de toutes les valeurs de la fonction $x(t)$, et en outre de $x(\tau_1)$, $x(\tau_2)$, ...; en tant que fonctionnelle de $x(t)$, on peut lui appliquer la théorie générale.

Toutefois, il faut éviter de négliger, sous prétexte de simplification, l'influence des points particuliers dans certaines questions où leur existence est à prévoir. Ainsi, lorsque la définition d'une fonctionnelle U ne met aucun tel point en évidence, sa dérivée fonctionnelle $U'_{x(\tau)}$ doit être considérée comme dépendant normalement de toutes les valeurs de $x(t)$ et en outre de $x(\tau)$. Si elle est continue d'ordre zéro, ce qui sera le cas général si la fonctionnelle U l'est, on est conduit à écrire

$$\delta U'_{x(\tau)} = f(\tau) \, \delta x(\tau) + \int_0^1 \varphi(t, \tau) \, \delta x(t) \, dt. \tag{24}$$

Telle est la forme normale de la variation d'une dérivée fonctionnelle ayant une continuité d'ordre zéro; nous reviendrons sur ce point quand nous étudierons les dérivées fonctionnelles secondes.

52. Cas de la continuité d'ordre p. — Des considérations analogues, si une fonctionnelle dépend d'un seul point particulier τ et a une continuité d'ordre p, conduisent à prendre comme forme normale de sa variation

$$(25)\qquad \delta U = A_0\,\delta x(\tau) + A_1\,\delta x'(\tau) + \ldots + A_p\,\delta x^{(p)}(\tau) + \int_0^1 \varphi(t)\,\delta x(t)\,dt.$$

En partant de la formule (11), on est d'abord conduit à faire figurer dans l'expression de δU une intégrale de la forme

$$\int_0^1 f(t)\,\delta x^{(p)}(t)\,dt.$$

Si $f(t)$ admet des dérivées continues jusqu'à l'ordre p, une intégration par parties la ramène à la forme d'intégrale qui figure dans la formule (25) et en outre à des termes dépendant spécialement des points particuliers $t = 0$ et $t = 1$. On est donc conduit à dire qu'il arrivera fréquemment qu'une fonctionnelle continue d'ordre $p > 1$ dépendra spécialement des valeurs de $x(t)$ et de ses dérivées aux extrémités de l'intervalle de variation de t.

Une autre circonstance à prévoir est que la fonction $f(t)$ devienne infinie, ainsi que ses dérivées pour $t = \tau$. Supposons qu'elle admette un pôle simple; la fonction $\varphi(t)$ aura alors un pôle d'ordre $p+1$. L'intégrale de la formule (25) n'a plus de sens, mais l'intégrale

$$(26)\qquad \int_0^1 \varphi(t)\left[\delta x(t) - \delta x(\tau) - (t-\tau)\,\delta x'(\tau) - \ldots - \frac{(t-\tau)^p}{p!}\,\delta x^{(p)}(\tau)\right] dt$$

a un sens bien défini; il en est de même de l'intégrale

$$(27)\qquad v.p.\int_0^1 \varphi(t)\left[\delta x(t) - \delta x(\tau) - (t-\tau)\,\delta x'(\tau) - \ldots - \frac{(t-\tau)^{p-1}}{(p-1)!}\,\delta x^{(p-1)}(\tau)\right] dt,$$

$v.p$ désignant la *valeur principale au sens de Cauchy*, c'est-à-dire la limite, pour $\varepsilon = 0$, de l'intégrale obtenue en retranchant l'intervalle $(\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon)$ de l'intervalle d'intégration.

On est ainsi conduit à des expressions un peu plus générales que la formule (25), obtenues en remplaçant l'intégrale de cette formule par l'une des expressions (26) et (27). Elles se réduisent à la formule (25) lorsque la fonction $\varphi(t)$ reste finie pour $t = \tau$.

Ces différentes formules peuvent en particulier s'appliquer au cas de la variation d'une dérivée fonctionnelle.

53. Les expressions précédentes se rattachent naturellement à la formule de M. Hadamard. Nous allons le montrer en indiquant une circonstance qui se présente effectivement dans la théorie de la fonction de Green [1].

Soit une fonctionnelle U_λ dépendant de $x(t)$ et d'un paramètre λ. Supposons que, pour $\lambda > 0$, nous ayons établi la formule

$$\delta U_\lambda = \int^1 \varphi_\lambda(t)\,\delta x(t)\,dt,$$

mais que cette formule cesse d'avoir un sens pour $\lambda = 0$, la fonction $\varphi_0(t)$ ayant un pôle double pour $t = \tau$. Nous supposerons, de plus, que le produit $(t-\tau)^2\varphi_\lambda(t)$ reste fini, non seulement pour $\lambda = 0$, mais pour λ voisin de 0. On est conduit à définir δU_0 par la formule

$$\delta U_0 = \lim_{\lambda=0} \delta U_\lambda = \lim_{\lambda=0} \int_0^1 \varphi_\lambda(t)\,\delta x(t)\,dt,$$

qui est identique à celle de M. Hadamard. Étant données les hypothèses faites sur la fonction $\varphi_\lambda(t)$, cette expression devient

$$(28)\quad \delta U_0 = \int_0^1 \varphi_0(t)\,[\delta x(t) - \delta x(\tau) - (t-\tau)\,\delta x'(\tau)]\,dt + A_0\,\delta x(\tau) + A_1\,\delta x'(\tau),$$

en posant

$$A_0 = \lim_{\lambda=0} \int_0^1 \varphi_\lambda(t)\,dt,$$

$$A_1 = \lim_{\lambda=0} \int_0^1 \varphi_\lambda(t)\,(t-\tau)\,dt.$$

On obtient ainsi l'expression envisagée, n° 52, p ayant ici la valeur 1.

54. Les correspondances linéaires entre deux fonctions. — La

---

[1] Elle se présente lorsqu'on veut appliquer la formule qui donne la variation de $\dfrac{d^2 g_B^A}{dn_A\,dn_B}$ au cas où l'un des points A et B vient sur le contour (*voir* le Chapitre III de la deuxième Partie).

méthode des n°s 49 et 50 conduit, pour l'expression d'une fonction dépendant linéairement d'une autre fonction, à des résultats beaucoup moins simples que ceux de MM. Riesz et Fréchet pour les fonctionnelles linéaires. Mais au point de vue pratique que nous venons d'indiquer, ces résultats se simplifient beaucoup, et l'on est conduit à dire que, dans le cas de la continuité d'ordre zéro envisagée (n°s 49 et 50), la forme normale d'une fonction $X(s)$ dépendant linéairement d'une fonction $x(t)$ est

$$(29) \qquad X(s) = \sum_i a_i(s) x[\tau_i(s)] + \int_0^1 x(t) \varphi(s, t)\, dt.$$

Les conditions que doivent vérifier les fonctions $a_i(s)$, $\tau_i(s)$, $\varphi(s, t)$ pour que cette correspondance vérifie les conditions de continuité indiquées, soit n° 49, soit n° 50, se déduisent d'ailleurs aisément des résultats des n°s 49 et 48.

Il convient de remarquer que, pourvu que $\tau(s)$ dépende effectivement de s, les termes dépendant d'un point particulier $\tau(s)$ peuvent exister même dans le cas où l'on veut que le voisinage *en moyenne* de deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ suffise pour entraîner le voisinage en moyenne des fonctions correspondantes $X(s)$ et $Y(s)$. Au contraire, ils n'existaient pas dans le problème traité par M. Fréchet, où le même voisinage des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ devait entraîner le voisinage des valeurs correspondantes d'une fonctionnelle U ne dépendant pas d'un paramètre. Il suffit, pour se rendre compte de cette différence, de considérer l'exemple des fonctionnelles dépendant de $x(t)$:

$$X(s) = x(s), \qquad U = x\left(\frac{1}{2}\right).$$

La première a la continuité désirée et non la seconde.

Dans le cas où l'on envisage des continuités d'ordre $p > 0$, il y a lieu d'ajouter à la formule (29) des termes analogues à ceux introduits dans les formules (25) et (26), les a et les τ étant ici des fonctions de s.

GÉNÉRALISATIONS DIVERSES.

55. Fonctionnelles dépendant des valeurs d'une fonction $x(t)$ pour des valeurs quelconques de t (t compris entre $-\infty$ et $+\infty$). — Nous

n'indiquons ici ce cas que pour mémoire, n'ayant en vue aucune application dans la suite. Indiquons seulement comment il faut appliquer la méthode du passage du fini à l'infini.

Choisissons un mode de division de l'axe des t en n intervalles par des points de division $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$. Supposons que n devenant infini, t_1 devienne infini par valeurs négatives, t_{n-1} par valeurs positives, et que, dans un intervalle fini quelconque de l'axe des t, le plus grand des intervalles partiels (t_i, t_{i+1}) qui lui soit intérieur tende vers o. Tel est le cas par exemple si l'on définit t_i par la formule

$$\int_{-\infty}^{t_i} e^{-\pi t^2}\, dt = \frac{i}{n},$$

ou bien si l'on prend la suite

$$-p, \quad -p+\frac{1}{p}, \quad -p+\frac{2}{p}, \quad \ldots, \quad p,$$

p étant un entier devenant infini.

Soit x_i une valeur d'une fonction $x(t)$ dans l'intervalle (t_{i-1}, t_i), et soit $X(t)$ une fonction égale dans chacun des intervalles à la valeur choisie x_i. Lorsque n devient infinie, $X(t)$ tend vers $x(t)$, et cela uniformément dans tout intervalle fini. Une fonctionnelle de $x(t)$ peut alors être considérée comme la limite d'une fonction de $x_1, \ldots, x_n$.

Le lecteur trouvera une application de ce procédé dans les travaux de R. Gateaux [*Sur la représentation des fonctionnelles continues* (*Rend. d. R. Accademia dei Lincei*, 1er mars 1914)].

Dans le cas qui nous occupe, la forme normale de la variation, généralisant celle de M. Volterra, est

$$\delta U = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, \delta x(t)\, dt. \tag{30}$$

Cette intégrale n'a de sens que si $\delta x(t)$ vérifie certaines conditions nécessaires à sa convergence. Ces conditions peuvent d'ailleurs ne pas être très restrictives. Si l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|\, dt$$

a un sens, il suffit que $\delta x(t)$ soit limité supérieurement, c'est-à-dire que la fonction variée $y(t)$ tende uniformément vers $x(t)$.

56. Fonctionnelles dépendant d'une fonction de n variables. — Nous avons déjà examiné le cas où $n = 2$. D'une manière générale, si une fonctionnelle U dépend des valeurs prises par une fonction $x(t_1, \ldots, t_n)$ dans un domaine V de l'espace lieu du point de coordonnées $t_1, \ldots, t_n$, la forme normale de sa variation sera l'intégrale d'ordre n :

$$(31) \qquad \delta U = \int \cdots \int_V \varphi(t_1, \ldots, t_n)\, \delta x(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n.$$

Mais U peut dépendre spécialement des valeurs de x en certains points, sur certaines lignes, sur certaines surfaces, de sorte que l'expression de δU peut contenir en plus des termes de la forme $a\delta x(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, et des intégrales d'ordre $1, 2, \ldots, n-1$.

57. Fonctionnelles dépendant de plusieurs fonctions. — Soit pour fixer les idées une fonctionnelle U dépendant des valeurs de deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ pour $0 < t \leqq 1$. On peut observer que la donnée de $x(t)$ et $y(t)$ équivaut à la donnée d'une fonction unique $z(t)$ définie par

$$z(t) = x(2t), \qquad \left(0 < t \leqq \frac{1}{2}\right),$$

$$z(t) = y(2t-1), \qquad \left(\frac{1}{2} < t \leqq 1\right).$$

Mais cette remarque n'empêche pas qu'il y a intérêt à considérer comme une nouvelle sorte de fonctionnelles celles qui dépendent de deux fonctions, de même que la remarque que les points d'une droite et ceux d'un plan constituent des ensembles de même puissance ne dispense pas de l'étude des fonctions de deux variables [1].

La forme normale de la variation de U sera ici

$$(32) \qquad \delta U = \int_0^1 [\varphi(t)\, \delta x(t) + \psi(t)\, \delta y(t)]\, dt,$$

$\varphi(t)$ et $\psi(t)$ étant les *dérivées fonctionnelles partielles* de U par

[1] En considérant U comme fonctionnelle de $z(t)$, on rencontrerait en général cette circonstance que $U'_{z(t)}$ dépendrait spécialement, non seulement de $z(t)$, mais aussi de $z\left(t \pm \frac{1}{2}\right)$. Le meilleur moyen d'étudier des fonctionnelles présentant cette circonstance est de les considérer comme dépendant de deux fonctions distinctes x et y.

rapport à $x(t)$ et $y(t)$. Nous désignerons ces dérivées par

$$U'_{x(t)}, \quad U'_{y(t)}.$$

On peut de même considérer des fonctionnelles dépendant d'un plus grand nombre de fonctions d'une ou de plusieurs variables.

58. Fonctions d'une ligne gauche. — Jusqu'ici, nous nous sommes placés au point de vue algébrique. Au point de vue géométrique, il y a lieu d'étudier les fonctions d'une ligne plane, d'une ligne gauche, ou d'une surface. Le lien de ces notions avec celles qui précèdent est évident ; il peut être précisé de plusieurs manières suivant les représentations paramétriques employées pour définir les courbes et surfaces considérées.

Soit d'abord une courbe gauche fermée C,

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t),$$

dont tous les points soient obtenus en faisant varier t de 0 à 1. Lorsqu'elle se déforme, les coordonnées du point correspondant à la valeur t du paramètre deviennent $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, les variations δx, δy, δz étant seulement assujetties à prendre la même valeur pour $t = 0$ et $t = 1$. Pour une fonctionnelle U dépendant de la ligne C, la forme normale de la variation sera

$$(33) \qquad \delta U = \int_0^1 (U'_x \, \delta x + U'_y \, \delta y + U'_z \, \delta z) \, dt,$$

U'_x, U'_y, U'_z étant trois fonctions de t. Ces fonctions ne sont pas indépendantes ; une fonction d'une ligne gauche étant assimilable à une fonctionnelle dépendant de deux fonctions d'une variable, il ne peut y avoir que deux dérivées fonctionnelles indépendantes. En effet, si le déplacement du point x, y, z est un glissement sur la courbe C, la fonction U, qui doit dépendre de la ligne C et non de la représentation paramétrique choisie, ne varie pas. Il faut pour cela que

$$(34) \qquad x' U'_x + y' U'_y + z' U'_z = 0,$$

x', y', z' étant les dérivées de x, y, z par rapport à t.

Dès ses premiers travaux sur le calcul fonctionnel, M. Volterra a étudié les fonctions de lignes en partant de ces formules et défini une classe simple de fonctions qu'il a appelées *fonctions du premier degré*

(identiques, dans le cas d'une ligne plane, à ce que nous avons appelé plus haut des *fonctionnelles additives*), et a obtenu à l'aide de ces fonctions une remarquable extension de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire [1].

59. Fonctions d'une ligne plane et fonctions d'une surface. — Par analogie avec ce qui précède, la forme normale de la variation d'une fonction d'une ligne plane peut s'écrire

$$\delta U = \int_0^1 (U'_x \delta x + U'_y \delta y)\, dt,$$

ou, si l'on prend pour paramètre la longueur d'arc ds sur la ligne considérée C,

$$\delta U = \int_C (U'_x \delta x + U'_y \delta y)\, ds. \tag{35}$$

Dans les applications que nous avons en vue, nous adopterons avec M. Hadamard une forme différente, ne faisant intervenir qu'une fonction de s. La composante suivant la tangente à la courbe du déplacement du point x, y étant sans importance, nous n'avons qu'à tenir compte de la composante normale δn, comptée positivement dans un sens déterminé (nous supposerons que la rotation qui amène la tangente prise dans le sens des s croissants sur le sens positif de la normale est de même sens que celle qui amène l'axe des x sur l'axe des y). La formule (35) devient alors

$$\delta U = \int_C U'_n \delta n\, ds, \tag{36}$$

U'_n étant ce que nous appellerons la *dérivée fonctionnelle de la fonction de ligne plane* U. On voit d'ailleurs aisément que

$$U'_x = -y' U'_n, \qquad U'_y = x' U'_n,$$

x' et y' étant les dérivées de x et y par rapport à s, c'est-à-dire les

---

[1] *Voir* V. Volterra, *Sur la génération de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire* (*Acta mathematica*, t. XII, 1889). — *Voir* aussi dans ma Thèse, nos 3 à 5, un résumé du Mémoire de M. Volterra et de Notes postérieures publiées dans les *Rendiconti de l'Acc. dei Lincei* et relatives à l'extension aux espaces à plus de trois dimensions.

cosinus directeurs de la tangente à la courbe. Appelons de même $\delta n'$ la dérivée de δn. On voit aisément que

$$\delta x' = -y'\,\delta n', \qquad \delta y' = x'\,\delta n',$$

d'où

$$\delta U'_x = -y'\,\delta U'_n - x'\,U'_n\,\delta n',$$
$$\delta U'_y = \quad x'\,\delta U'_n - y'\,U'_n\,\delta n'.$$

Ces formules montrent que si, pour certaines fonctionnelles, bien que la définition de U'_n dépende spécialement d'un point particulier de la courbe, $\delta U'_n$ s'exprime par une intégrale de M. Volterra, il ne peut en être de même de $\delta U'_x$ et $\delta U'_y$, et que, de même, l'expression de ces quantités faisant intervenir $\delta n'$, U'_x et U'_y ne peuvent avoir qu'une continuité d'ordre 1 ([1]).

Dans le cas d'une fonction de surface, on arrive à une formule tout à fait analogue à la formule (36). Ici encore il suffit de définir la déformation de la surface S par le déplacement normal δn de chacun de ses points, et en prenant pour élément différentiel l'élément d'aire dS, on est conduit à la formule

$$\delta U = \int_S \Phi'_n\,\delta n\,dS, \tag{37}$$

Φ'_n étant par définition *la dérivée fonctionnelle de la fonction de surface* U.

60. Remarque sur le choix d'un type simple de fonctionnelles. — Dans la plupart des questions traitées dans la suite, lorsque nous n'aurons pas en vue la recherche d'une grande généralité, nous prendrons la variation des fonctionnelles étudiées sous la forme de M. Volterra, c'est-à-dire que nous supposerons (à moins d'avoir des raisons de ne pas le faire) que la fonctionnelle étudiée ne dépend pas d'un point particulier.

Dans le cas, que nous avons jusqu'ici pris pour type, des fonctionnelles dépendant d'une fonction $x(t)$ définie entre 0 et 1, il arrivera très souvent que ces fonctionnelles dépendent spécialement de $x(0)$ et $x(1)$, et même, pour la théorie générale, il sera souvent impossible

---

([1]) *Voir* la Note déjà citée de M. Hadamard, *Sur les dérivées des fonctions de lignes* (*Bull. Soc. math.* 1902).

d'éviter de considérer ces termes, qui s'introduiront par exemple si l'on intègre par parties, comme nous l'avons vu n° 52.

On peut songer à éviter cette difficulté en prenant comme type de fonctionnelles les fonctions d'une ligne plane fermée. Mais dans ce cas, une autre cause de complication se présente provenant de ce que, si nous voulons différentier la formule (36), nous ne pouvons considérer ds comme une constante. Le paramètre s est à ce point de vue beaucoup moins avantageux que ne l'était le paramètre t dans l'étude des fonctionnelles dépendant de $x(t)$, comme nous aurons l'occasion de le montrer plus tard.

Dans la suite, nous prendrons comme type de fonctionnelles une quantité U dépendant d'une fonction $x(t)$ définie en chaque point d'une ligne fermée fixe C, le paramètre t variant de 0 à 1 $(0 < t \leqq 1)$, lorsqu'on décrit toute la ligne. Cela revient, au point de vue algébrique, à supposer que $x(t)$ et la dérivée fonctionnelle $U'_{x(t)}$ sont des fonctions de période 1. Si l'on ne suppose pas ces fonctions continues, cela ne restreint nullement les valeurs qu'elles peuvent prendre dans l'intervalle considéré $(0, 1)$. Mais, si on les suppose continues ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre p, il faut que l'on ait, en ce qui concerne $x(t)$ par exemple,

$$x(0) = x(1), \qquad x'(0) = x'(1), \qquad \ldots, \qquad x^{(p)}(0) = x^{(p)}(1).$$

De cette manière, nous pourrons exposer la théorie générale en la dégageant des difficultés accessoires qui résultent, soit de l'impossibilité d'effectuer des intégrations par parties sans considérer spécialement les limites de variation de t, soit, si l'on étudie les fonctions de lignes, de l'impossibilité de choisir un paramètre aussi commode que l'argument t d'une fonction $x(t)$.

Il sera ensuite facile de voir comment la théorie générale doit être modifiée si l'on veut l'appliquer, soit à l'étude des fonctionnelles dépendant d'une fonction non périodique, soit à l'étude des fonctions de lignes.

CHAPITRE V.

VARIATION SECONDE ET FONCTIONNELLES DU SECOND DEGRÉ.

SOMMAIRE : *Le point de vue logique :* Fonctionnelles entières et homogènes du second degré. — Définition de la variation seconde. — Minimum d'une fonctionnelle. — *Le point de vue pratique :* Fonctionnelles continues dans le champ des fonctions de carrés sommables. — Le passage du fini à l'infini. — Les dérivées fonctionnelles secondes. — Les fonctionnelles de Gateaux. — Variation de la dérivée fonctionnelle première. — Cas des fonctionnelles continues d'ordre p.— Les expressions adjointes. — Application aux dérivées fonctionnelles. — *Généralisations diverses :* Fonctions d'une ligne plane. — Fonctions d'une ligne plane et d'un point. — Fonctionnelles dépendant de deux fonctions ou d'une ligne et d'une fonction.

LE POINT DE VUE LOGIQUE.

61. Fonctionnelles entières et homogènes du second degré. — Comme au Chapitre précédent, nous pouvons nous placer soit au point de vue logique, soit au point de vue pratique. Nous insisterons moins sur le premier point de vue que nous ne l'avons fait pour l'étude de la variation première; nous insisterons surtout sur le second de manière à préciser la définition des dérivées fonctionnelles secondes qui nous paraît devoir être adoptée.

Suivant le point de vue de M. Fréchet, la notion de variation seconde est liée à celle de fonctionnelle du second degré comme la notion de variation première est liée à celle de fonctionnelle linéaire.

On dit qu'une fonctionnelle U dépendant d'une fonction $x(t)$ est *entière et homogène du second degré* si, lorsque $x(t)$ est de la forme

$$x(t) = \lambda x_1(t) + \mu x_2(t),$$

où λ et μ sont des constantes, U est un polynome homogène du

second degré en λ et μ, soit de la forme

$$(1) \qquad U = A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2.$$

Il vient alors, en donnant à λ et μ des valeurs particulières (0 ou 1),

$$U|[x_1(t)]| = A,$$
$$U|[x_2(t)]| = C,$$
$$U|[x_1(t) + x_2(t)]| = A + 2B + C,$$

d'où l'on tire

$$(2) \qquad 2B = U|[x_1(t) + x_2(t)]| - U|[x_1(t)]| - U|[x_2(t)]| = 2V[x_1(t), x_2(t)]|.$$

Cette quantité est une fonctionnelle symétrique de $x_1(t)$ et $x_2(t)$, évidemment bilinéaire, c'est-à-dire linéaire par rapport à chacune de ces fonctions. Sa connaissance équivaut à celle de U, puisque V est exprimé à l'aide de U par la formule (2), et qu'inversement on a

$$(3) \qquad U|[x(t)]| = V|[x(t), x(t)]|.$$

Il suffit alors d'appliquer à V les résultats des n°s 47 et 48, et d'une manière générale les différents résultats généralisant ceux relatifs aux fonctionnelles linéaires, pour obtenir les résultats correspondants relatifs aux fonctionnelles entières et homogènes du second degré. Ainsi, la formule de M. Hadamard se généralise par la formule

$$(4) \qquad U|[x(t)]| = \lim_{\mu=\infty} \int_0^1 \int_0^1 F(s, t, \mu) x(s) x(t).$$

On généralise de même la formule de M. Riesz relative aux fonctionnelles définies dans le champ des fonctions continues. On peut aussi écrire, soit

$$(5) \qquad U|[x(t)]| = \int\int x(s)x(t)\, d\Phi,$$

l'intégrale double étant étendue au carré $0 < s < 1$, $0 < t < 1$, et Φ étant une fonctionnelle additive à variation bornée, soit

$$(5') \qquad U|[x(t)]| = \int_0^1 \int_0^1 x(s)x(t)\, d_s d_t \varphi(s, t).$$

On peut, ce que nous ferons dans la suite, supposer $\varphi(s, t)$ symé-

trique, car dans le cas contraire on peut remplacer $\varphi(s, t)$ par $\frac{1}{2}[\varphi(s, t) + \varphi(t, s)]$, ce qui ne change pas la valeur de U. La répartition de masses liées à la fonctionnelle Φ est alors symétrique par rapport à la droite $s = t$. La notion de fonctionnelle entière et homogène du second degré, définie et continue dans le champ des fonctions continues dans l'intervalle (0, 1), est donc liée à la notion d'une répartition, à l'intérieur du carré $0 < s < 1$, $0 < t < 1$, et symétriquement par rapport à la droite $s = t$, de masses dont les valeurs absolues aient une somme finie.

La même représentation convient *a fortiori* aux fonctionnelles définies et continues dans le champ des fonctions de carrés sommables; mais, dans ce cas, la répartition de masses est soumise à certaines restrictions (*voir* n° 48). Rappelons que, si cette répartition ne comprend que des masses réparties dans des aires et de densité superficielle sommable, et des masses réparties sur des lignes et de densité sommable, de sorte que la formule (5) se réduit à des quadratures ordinaires, ces restrictions consistent en ce que les lignes considérées ne doivent comprendre aucune portion finie d'une parallèle aux axes.

Remarquons enfin, par une extension évidente du n° 39, que pour les fonctionnelles entières et homogènes du second degré (et aussi pour les fonctionnelles homogènes de degré quelconque), cela revient au même de dire qu'elles sont définies dans tout champ fonctionnel fini, ou qu'elles y sont continues.

62. **Définition de la variation seconde.** — Nous pouvons maintenant, avec M. Fréchet, définir la variation seconde. Une fonctionnelle U de $x(t)$ admet une variation seconde $\delta^2 U$ au sens de M. Fréchet, si $\delta^2 U$ est une fonctionnelle entière et homogène du second degré, et si le rapport

$$(6) \qquad \frac{U|[x + \delta x]| - U|[x]| - \delta U - \frac{1}{2}\delta^2 U}{m^2},$$

m désignant le module fonctionnel de δx, tend vers zéro avec m.

Si $\delta^2 U$ existe, cette variation peut être définie par la formule

$$(7) \qquad \delta^2 U = \left\{\frac{d^2}{d\lambda^2} U|[x + \lambda\,\delta x]|\right\}_{\lambda=0}.$$

Mais cette expression, que nous appellerons *variation seconde* au sens de Gateaux, peut ne pas être une variation au sens de M. Fréchet. Les circonstances déjà indiquées à propos des variations premières peuvent également se produire ici. L'expression (7) peut être une fonctionnelle de δx, homogène du second degré, mais non entière. D'autre part, δx étant de la forme $\lambda f(t)$, elle peut être telle que le rapport (6) tende vers zéro avec λ, mais non uniformément, lorsque $f(t)$ est une fonction quelconque de module fonctionnel égal à 1.

Nous dirons dans la suite qu'une fonctionnelle U, admettant une variation première δU, admet une variation seconde si l'expression (7) existe et est entière et homogène de degré 2 en δx.

63. **Minimum d'une fonctionnelle.** — Si, pour une fonction déterminée $x_0(t)$, δU est nul et $\delta^2 U$ positif pour toutes les déterminations de $\delta x(t)$, il est naturel de se demander si la fonctionnelle U admet un minimum pour la détermination considérée de $x(t)$.

Pour simplifier l'écriture, nous supposerons $x_0(t) = 0$, et nous écrirons $x(t)$ au lieu de $\delta x(t)$. Nous appellerons r le module fonctionnel de cette fonction.

On peut énoncer le résultat suivant : *S'il existe un nombre positif k tel que $\delta^2 U$ soit supérieur à kr^2 pour toutes les déterminations de $x(t)$, et si $\delta^2 U$ est une variation seconde au sens de M. Fréchet, la fonctionnelle U admet un minimum pour $x(t) = 0$.*

En effet, d'après la définition de la variation seconde, l'expression

$$(8) \qquad \frac{U - U_0 - \delta U - \frac{1}{2}\delta^2 U}{r^2} = \frac{U - U_0 - \frac{1}{2}\delta^2 U}{r^2}$$

tend vers zéro avec r. Il existe donc un nombre η tel que, pour $r < \eta$, elle soit inférieure en module à $\frac{k}{4}$. On a alors

$$U - U_0 > \frac{1}{2}\frac{\delta^2 U}{r^2} - \frac{k}{4} > \frac{k}{4}.$$

Pour que, δU étant nul et $\delta^2 U$ positif, il n'y ait pas minimum, il faut donc, ou bien que le nombre k n'existe pas, ou bien que $\delta^2 U$, défini par la formule (7), ne soit pas une différentielle au sens de M. Fréchet. Nous allons donner des exemples des deux circonstances,

en prenant pour r la définition normale qui résulte de la formule

$$r^2 = \int_0^1 x^2(t)\,dt. \tag{9}$$

64. La première circonstance peut se présenter, non seulement dans le calcul fonctionnel, mais dans l'étude des fonctions de deux variables seulement. M. Hadamard a signalé l'exemple de la fonction

$$u = (y - x^2)(y - 2x^2),$$

qui n'est pas minima à l'origine bien que les termes du second degré soient positifs. Cela tient à ce que ces termes se réduisent à y^2 et peuvent être d'un ordre infinitésimal supérieur au second si y est très petit par rapport à x; il n'existe aucun nombre k tel que ces termes soient supérieurs à $k(x^2+y^2)$.

Pour les fonctions de n variables, le nombre k existe nécessairement si les termes du second degré sont de la forme

$$\lambda_1 P_1^2 + \lambda_2 P_2^2 + \ldots \lambda_n P_n^2, \tag{10}$$

les λ étant tous positifs, et P désignant des fonctions linéaires indépendantes.

Dans le calcul fonctionnel, des circonstances un peu plus compliquées peuvent se présenter. Considérons, par exemple, la fonctionnelle du second degré

$$U_2 = \lambda_1 a_1^2 + \ldots + \lambda_n a_n^2 + \ldots,$$

en posant

$$a_n = \sqrt{2}\int_0^1 x(t)\sin n\pi t\,dt.$$

La formule

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + \ldots = r^2$$

montre que les a ne peuvent être tous nuls sans que r soit nul, et sont à ce point de vue analogues aux P de la formule (10). Si les λ ont une limite inférieure positive K, $\frac{U^2}{r^2}$ est nécessairement $\geqq$ K, et, comme $\delta^2 U_2 = 2U_2$, on peut prendre $k = 2K$. Mais, les λ étant en nombre infini, peuvent être tous positifs sans admettre de limite inférieure positive, et comme, pour

$$x(t) = \sin n\pi t,$$

le rapport $\frac{\delta^2 U_2}{r^2}$ se réduit à $2\lambda_n$, le nombre k n'existe pas. Prenons, pour fixer les idées, $\lambda_n = \frac{1}{n}$, et considérons la fonctionnelle

$$U = U_2 - r^p \qquad (p > 2),$$

qui a même différentielle seconde que U. Je dis qu'elle n'admet pas un minimum pour $x(t) = 0$. Nous n'avons pour le voir qu'à considérer les fonctions

$$x_n(t) = \frac{\sqrt{2}\sin n\pi t}{\log n} \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty)$$

dont les modules fonctionnels

$$r_n = \frac{1}{\log n}$$

tendent vers zéro. Pour ces fonctions, U prend les valeurs

$$\frac{1}{n(\log n)^2} - \frac{1}{(\log n)^p}$$

qui sont négatives pour n assez grand et, par suite, tendent vers zéro en croissant [1].

65. Considérons maintenant la fonctionnelle

$$U = c r^2 - \sum_n a_n^{2+\lambda_n},$$

r et a_n ayant la même signification que ci-dessus, c étant un coef-

---

[1] *Voir* aussi l'exemple de Scheeffer, cité par M. Hadamard (*Leçons sur le calcul des variations*, n° 41). Il s'explique d'une manière tout à fait analogue. Au lieu d'être comme la fonction U_2 du texte la somme d'une infinité dénombrable de carrés dont les coefficients n'admettent pas de limite inférieure, la partie du second degré de la fonctionnelle considérée par Scheeffer est l'intégrale

$$\int_0^1 (t-\tau)^2 x'^2(t)\, dt,$$

dans laquelle le coefficient $(t-\tau)^2$ n'admet pas non plus de limite inférieure positive.

ficient positif et les λ_n une suite de nombres positifs tendant vers zéro.

On vérifie sans peine que si

$$x(t) = \lambda \xi(t),$$

$\xi(t)$ étant une fonction déterminée et λ tendant vers zéro, le second terme de U est infiniment petit par rapport au premier, de sorte que l'expression $\delta^2 U$ définie par la formule (8) existe et a la valeur $2cr^2$.

Mais, malgré cela, U n'admet de minimum pour $x(t) = 0$ que si $c \geqq 1$. Si $c < 1$, il suffit pour voir que U n'admet pas de minimum pour $x(t) = 0$, de donner à $x(t)$ les valeurs

$$x_n(t) = \sqrt{2}\lambda_n \sin n\pi t \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty),$$

de modules fonctionnels λ_n tendant vers zéro. Les valeurs correspondantes de U,

$$\lambda_n^2 (c - \lambda_n^2),$$

sont négatives pour n assez grand et tendent vers zéro en croissant.

Il y a lieu de remarquer que, si les λ_n décroissent assez rapidement, si par exemple

$$\lambda_n = \frac{1}{n!},$$

cette circonstance est réalisée avec des fonctions qui, non seulement tendent uniformément vers zéro, mais dont toutes les dérivées tendent uniformément vers zéro. On voit donc que $\delta^2 U$ existe, sans être une différentielle seconde au sens de M. Fréchet, et que cette circonstance est liée au fait que $x(t) = 0$ n'est pas un minimum pour la fonctionnelle U.

LE POINT DE VUE PRATIQUE.

66. Fonctionnelles continues dans le champ des fonctions de carrés sommables. — Ce sont celles que nous considérerons principalement. Nous avons déjà remarqué qu'en pratique, il n'y a guère intérêt à introduire d'intégrales de Stieltjes dans les formules. Cette introduction, nécessaire évidemment si l'on veut obtenir une représentation générale des fonctionnelles considérées, ne fait en général que compliquer les calculs sans en changer essentiellement les conclusions. Aussi, lorsque nous considérerons des fonctionnelles entières et

homogènes du second degré, les supposerons-nous de la forme

$$(11)\qquad U = \int_0^1 \int_0^1 \varphi(t, t_1) x(t) x(t_1)\, dt\, dt_1 + \int_0^1 f(t) x^2(t)\, dt + \sum \int_{\alpha'}^{\alpha''} g(\alpha) x[t(\alpha)] x[t_1(\alpha)]\, d\alpha.$$

Dans cette expression, l'intégrale double correspond à des masses réparties dans le carré $0 < t < 1$, $0 < t_1 < 1$, avec une densité superficielle $\varphi(t, t_1)$ de carré sommable; la première intégrale simple correspond à des masses réparties sur la diagonale $t = t_1$ avec une densité linéaire $f(t)$ mesurable et bornée; les autres intégrales simples, réunies sous le signe Σ, correspondent à des masses réparties sur d'autres lignes C, intérieures au même carré, et ne pouvant comprendre aucun segment de droite parallèle aux axes. L'ensemble des masses peut être supposé réparti symétriquement par rapport à la diagonale $t = t_1$, ce qui exige en particulier que $\varphi(t, t_1)$ soit symétrique en t et t_1; cela ne restreint pas la généralité.

Parmi ces fonctionnelles, il nous arrivera de considérer spécialement celles du type

$$(12)\qquad U = \int_0^1 \int_0^1 \varphi(t, t_1) x(t) x(t_1)\, dt\, dt_1 + \int_0^1 f(t) x^2(t)\, dt,$$

que nous appellerons *fonctionnelles normales du second degré*. Les autres seront dites *fonctionnelles générales*, entières et homogènes du second degré.

Pour montrer la raison de cette distinction, considérons l'expression

$$I = \int_0^1 g(t) x(t) x(1-t)\, dt.$$

C'est une fonctionnelle singulière, correspondant à des masses réparties sur la droite $t + t_1 = 1$. On remarque que sa définition introduit une solidarité entre les valeurs de x pour des points symétriques l'un de l'autre par rapport au milieu de l'intervalle $(0, 1)$. La dérivée fonctionnelle

$$I'_x = [g(t) + g(1-t)] x(1-t)$$

relative au point t dépend spécialement de la valeur de x au point $1 - t$.

Une telle solidarité entre deux points *distincts* n'existe pas dans les fonctionnelles que les problèmes physiques conduisent à considérer. Ces fonctionnelles seront donc normales.

Au point de vue du développement de la théorie mathématique, à l'expression (11) qui déjà n'était pas tout à fait générale, on peut souvent, sans inconvénient, substituer l'expression (12). La forme plus simple de cette expression facilite le développement de la théorie sans risquer de la conduire dans une fausse direction, comme ce serait le cas, ainsi que nous le remarquerons plus loin, si l'on voulait réduire cette expression à l'intégrale double. Les résultats, une fois obtenus, peuvent ensuite être vérifiés dans le cas général.

67. Le passage du fini à l'infini. — Les fonctionnelles homogènes et entières du second degré peuvent, si elles sont continues, être obtenues par la méthode du passage du fini à l'infini.

Pour une fonction *simple d'ordre* n, c'est-à-dire ayant une valeur constante x_i dans chacun des intervalles $\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$, la fonctionnelle considérée prend la forme

$$(13) \qquad u_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} c_{i,j} x_i x_j.$$

Or, on peut trouver une fonction simple d'ordre n approchant en moyenne autant qu'on veut de toute fonction $x(t)$ de carré sommable. Le point de l'espace fonctionnel représentant $x(t)$ est donc la limite de points représentant des fonctions simples d'ordres croissants, et, en raison de la continuité, la fonctionnelle U est la limite des valeurs correspondantes de u_n.

Les nombres x_i sont assujettis à la condition que $\frac{1}{n}\Sigma x_i^2$ ait une limite déterminée, c'est-à-dire que les quantités x_i^2 et $x_i x_j$ sont en moyenne finies. L'expression (13) restera alors finie si $\Sigma c_{i,j}$ est finie. Il suffit pour cela que les coefficients $c_{i,j}$ soient de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{n^2}$; s'il y en a de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{n}$, il faut que leur nombre soit de l'ordre de grandeur de n.

L'ensemble des termes qui sont de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{n^2}$ conduisent à la limite à l'intégrale double des expressions (11) et (12). Ceux qui sont de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{n}$, si leur nombre est de

l'ordre de grandeur de $\frac{1}{n}$, conduisent à des intégrales simples. Il est particulièrement naturel de s'attendre à ce que les coefficients de x_i^2 jouent un rôle particulier et soient de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{n}$. S'ils sont seuls dans ce cas, la fonctionnelle obtenue est normale.

68. **Les dérivées fonctionnelles secondes.** — Passant de la notion de fonctionnelle du second degré à celle de variation seconde, considérons une fonctionnelle U ayant une variation seconde de la forme normale

$$(14) \qquad \delta^2 U = \int_0^1 f(t)(\delta x)^2\, dt + \int_0^1 \int_0^1 \varphi(t, t_1)\, \delta x\, \delta x_1\, dt\, dt_1,$$

en écrivant, pour simplifier, x et x_1 au lieu de $x(t)$ et $x(t_1)$. Cette variation apparaît comme étant la limite d'une différentielle seconde

$$(15) \qquad d^2 u_n = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} c_{i,j}\, dx_i\, dx_j,$$

les coefficients $c_{i,i}$ étant de l'ordre de $\frac{1}{n}$, et les autres coefficients $c_{i,j}$, si la fonction $\varphi(t, t_1)$ est bornée, étant de l'ordre de $\frac{1}{n^2}$. Supposons d'ailleurs

$$\varphi(t, t_1) = \varphi(t_1, t), \qquad c_{i,j} = c_{j,i},$$

ce qui ne restreint en rien la généralité.

On a alors

$$c_{i,i} = \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_i^2}, \qquad c_{i,j} = \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_i\, \partial x_j}.$$

Passant à la limite, nous appellerons *dérivées fonctionnelles secondes* de U, et désignerons par U''_{x^2} et U''_{xx_1} les fonctions

$$(16) \qquad U''_{x^2} = f(t), \qquad U''_{xx_1} = \varphi(t, t_1).$$

Ce serait une erreur, ou du moins une notation risquant de conduire à des erreurs, de désigner par U''_{x^2}, et de considérer comme généralisant la dérivée $\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_i^2}$, la fonction $\varphi(t, t)$, au lieu de $f(t)$, ainsi qu'on serait conduit à le faire si l'on n'introduisait pas systématiquement l'intégrale simple dans l'expression d'une fonctionnelle normale du second degré.

Ainsi, nous verrons dans la troisième Partie que la théorie de l'équation

$$\int_0^1 f(t)\,dt = 0 \tag{17}$$

généralise d'une manière remarquable la théorie de l'équation de Laplace. Il n'en est pas de même de l'équation

$$\int_0^1 \varphi(t, t)\,dt = 0, \tag{18}$$

que le point de vue indiqué conduirait à considérer comme la généralisation naturelle de l'équation de Laplace.

On peut même dire que cette équation ne paraît pas susceptible de présenter de l'intérêt. La fonction $\varphi(t, t_1)$, qui intervient dans une intégrale double, est essentiellement une fonction mesurable superficiellement. On peut changer sa valeur sur la droite $t = t_1$ sans rien changer d'essentiel; même si l'on suppose la fonction $\varphi(t, t_1)$ continue, on peut s'arranger pour que le changement ne porte que sur une aire aussi petite que l'on veut.

On peut, de cette remarque, déduire la conséquence suivante : de l'équation (18) ou, d'une manière générale, de toute équation faisant intervenir spécialement les valeurs de $\varphi(t, t_1)$ le long d'une courbe, on ne peut déduire aucune conséquence relative à la fonctionnelle U vérifiant cette équation et vérifiable par un calcul numérique approché, portant sur la fonctionnelle elle-même et non sur ses dérivées. En d'autres termes, une fonctionnelle continue quelconque, donnée dans un domaine fini, peut être approchée autant qu'on veut dans tout ce domaine par une solution de l'équation considérée.

69. Les fonctionnelles dont la variation seconde est normale jouissent de cette propriété que la variation seconde est définie par la donnée des dérivées fonctionnelles secondes. C'est de là que vient leur intérêt.

Dans le cas général, si la donnée des dérivées fonctionnelles secondes ne suffit pas pour définir $\delta^2 U$, il faut remarquer qu'elles sont tout de même bien définies. Il peut exister des masses réparties sur des lignes autres que la droite $t = t_1$; cela n'empêche pas que la densité superficielle U''_{xx_1} est bien définie, sauf peut-être pour les

points d'un ensemble de mesure superficielle nulle, ce qui est sans importance, et, si elle est continue, elle est définie partout; de même U''_{x^2}, qui est au facteur $\sqrt{2}$ près la densité linéaire sur la droite $t = t_1$, est toujours bien définie.

D'ailleurs, les propriétés résultant d'équations aux dérivées fonctionnelles telles que l'équation de Laplace (17) ou l'équation (19) ci-dessous, plus faciles à vérifier dans le cas des fonctionnelles normales, s'étendent au cas général, comme nous le verrons au Chapitre suivant et dans la troisième Partie.

70. Les fonctionnelles de Gateaux. — Nous désignerons ainsi les fonctionnelles pour lesquelles

$$U''_{x^2} = 0. \tag{19}$$

Si elles sont normales et du second degré, leur expression se réduit alors à l'intégrale double

$$\int_0^1 \int_0^1 \varphi(t, t_1)\, x(t_1)\, dt\, dt_1, \tag{20}$$

c'est-à-dire que la répartition de masses liée à cette fonctionnelle ne comprend que des masses réparties superficiellement.

On pourrait penser que les propriétés principales des fonctionnelles (20), au point de vue de leur continuité, tiennent à l'absence de masses réparties sur des lignes. Il n'en est rien, et nous verrons au Chapitre suivant une propriété considérée par Gateaux, qui appartient à l'intégrale (20), mais qui caractérise non les fonctionnelles pour lesquelles il n'y a pas de masses réparties sur des lignes, mais celles pour lesquelles il n'y en a pas sur la droite $t = t_1$, c'est-à-dire les fonctionnelles de Gateaux.

On s'explique aisément cette circonstance par la méthode du passage du fini à l'infini. Une fonctionnelle de Gateaux, entière et homogène du second degré, est la limite d'une fonction

$$\sum_{i=n}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} c_{i,j} x_i x_j,$$

dans laquelle les termes carrés $c_{i,i} x_i^2$ sont très petits par rapport à $\frac{1}{n}$, de sorte que leur somme est infiniment petite. On peut les négliger

sans rien changer à la limite. La fonctionnelle de Gateaux, du moins le cas du second degré que nous considérons ici, apparaît alors comme limite d'une fonction $u_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ linéaire par rapport à chacune des variables x_i. C'est cette propriété qui conduit de la manière la plus intuitive aux principales propriétés des fonctionnelles de Gateaux.

Pour cette raison, j'avais d'abord désigné ces fonctionnelles sous le nom de *fonctionnelles multilinéaires*. J'ai adopté le nom de *fonctionnelles de Gateaux*, depuis que j'ai remarqué leur identité avec celles qui jouissent d'une propriété considérée par Gateaux, du moins dans le cas où les dérivées fonctionnelles existent; la propriété en question ne fait pas, en effet, intervenir les dérivées fonctionnelles. Nous reviendrons sur cette question au Chapitre suivant, à propos des fonctionnelles de degré quelconque.

71. Variation de la dérivée fonctionnelle seconde. — Il y a naturellement un lien entre la variation seconde et la variation de la dérivée fonctionnelle première.

Appliquons la méthode du passage du fini à l'infini, en nous plaçant dans le cas où la variation seconde a la forme normale. Les coefficients c_{ii} sont alors seuls de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{n}$, et la formule

$$d\frac{\partial u_n}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_i\,\partial x_1}\,dx_1 + \ldots + \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_i\,\partial x_n}\,dx_n$$

donne à la limite

$$\delta U'_x = U''_{x^2}\,\delta x + \int_0^1 U''_{xx_1}\,\delta x_1\,dt_1 \tag{21}$$

U''_{xx_1} étant une fonction symétrique de t et t_1.

On retrouve la forme considérée au n° 51, comme conséquence de l'hypothèse que U'_x soit continue, et dépende spécialement du point t et de ce point seulement. On devait s'y attendre, car la continuité de U'_x dans le champ des fonctions de carrés sommables résulte de l'existence de $\delta_2 U$, et dire qne U'_x dépend spécialement du point t, et de ce point seulement, c'est évidemment la même chose que de dire que dans la répartition de masses liée à $\delta^2 U$, il y a des masses situées sur la droite $t = t_1$, mais qu'il n'y en a sur aucune autre ligne.

Si U'_x dépend spécialement d'un point autre que le point t, de l'expression de $\delta U'_x$, en différentiant δU, on déduit sans peine une expression de $\delta^2 U$ qui est de la forme générale (11).

72. Cas des fonctionnelles continues d'ordre p. — Dans les cas plus généraux, $\delta U'_x$ est toujours une fonctionnelle linéaire de δx, dont la forme dépend de t. Nous emploierons généralement, pour désigner une telle expression, la notation

$$\delta U'_x = E(\delta x). \tag{22}$$

Considérons le cas où U'_x est en moyenne continue d'ordre p, et ne dépend spécialement d'aucun autre point que le point t. En admettant, pour simplifier l'écriture, que U''_{xx_1} soit de carré sommable, même dans le voisinage du point $t = t_1$, où il pourrait ne pas en être ainsi (*voir* n° 52), $\delta U'_x$ a une expression de la forme

$$\delta U'_x = A_0\,\delta x + A_1\,\delta x' + \ldots + A_p\,\delta x^{(p)} + \int_0^1 \varphi(t, t_1)\,\delta x_1\,dt_1. \tag{23}$$

Les coefficients A_i sont naturellement des fonctions mesurables bornées, et $\varphi(t, t_1)$ est une fonction de carré sommable. Mais ces quantités doivent vérifier d'autres conditions.

Supposons que la forme de $x(t)$ dépende non d'un paramètre λ, mais de deux paramètres λ et μ, et, pour éviter d'avoir à faire figurer ces paramètres dans les formules, posons

$$\delta(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial\lambda}\,d\lambda, \qquad \delta_1(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial\mu}\,d\mu.$$

On doit avoir

$$\delta\delta_1 U = \delta_1\,\delta U, \tag{24}$$

ce qui impose quelques restrictions à l'expression $E(\delta x)$. Lorsque nous aurons précisé ces restrictions, nous formerons $\delta^2 U$.

La formule (24), développée, s'écrit

$$\int_0^1 [\delta_1 x\,E(\delta x) + U'_x\,\delta\delta_1 x]\,dt = \int_0^1 [\delta x\,E(\delta_1 x) + U'_x\,\delta_1\,\delta x]\,dt,$$

ou, puisque $\delta\delta_1 x = \delta_1\,\delta x$,

$$\int_0^1 \delta_1 x\,E(\delta x)\,dt = \int_0^1 \delta x\,E(\delta_1 x)\,dt. \tag{25}$$

Cette formule doit être vérifiée quelles que soient les fonctions δx et δx_1. Cela revient à dire que l'expression $E(\delta x)$ est *identique à son adjointe*. Nous allons établir quelques propriétés des expressions adjointes. Nous reviendrons ensuite au problème qui nous occupe.

73. Les expressions adjointes [1]. — Nous dirons que deux expressions $E(x)$ et $\mathcal{E}(x)$, fonctionnelles linéaires de x dont la forme dépende de t, sont *adjointes*, si l'on a

$$\int_0^1 y(t)E(x)\,dt = \int_0^1 x(t)\mathcal{E}(y)\,dt, \tag{26}$$

x et y étant des fonctions de t quelconques, ou assujetties seulement aux conditions d'être continues, d'avoir des dérivées continues et d'être périodiques de période 1.

Une fonctionnelle linéaire ne peut admettre qu'une adjointe. En effet, si $\mathcal{E}(x)$ et $\mathcal{E}_1(x)$ sont adjointes à la même expression $E(x)$, on a, quelle que soit la fonction $x(t)$,

$$\int_0^1 x(t)[\mathcal{E}(y) - \mathcal{E}_1(y)]\,dt$$

et, par suite,

$$\mathcal{E}(y) = \mathcal{E}_1(y).$$

De la formule de définition (26) résulte immédiatement le théorème suivant, que nous utiliserons souvent dans la suite.

Si $E(x)$ et $F(x)$ admettent respectivement pour adjointes $\mathcal{E}(x)$ et $\mathcal{F}(x)$, $E[F(x)]$ admet pour adjointe $\mathcal{F}[\mathcal{E}(x)]$. Un énoncé analogue s'applique à la composition de plus de deux opérations fonctionnelles linéaires. En particulier, si $E(x)$ est sa propre adjointe, il en est de même de $F\{E[\mathcal{F}(x)]\}$.

Comme l'opération $f(t)x$ est évidemment sa propre adjointe, et que l'opération $\frac{d^i x}{dt^i}$, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\int_0^1 y(t)\frac{d^i x(t)}{dt^i}\,dt = (-1)^i \int_0^1 x(t)\frac{d^i y(t)}{dt^i}\,dt$$

---

[1] *Voir* Paul Lévy, *Sur l'intégration des équations aux dérivées fonctionnelles partielles* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1914, 1er semestre, § 2).

(x et y étant périodiques), admet pour adjointe $(-1)^i \frac{d^i x}{dt^i}$, il résulte du théorème précédent sur la composition des opérations fonctionnelles linéaires que l'expression

$$(27) \qquad (-1)^i \frac{d^i}{dt^i}\left[f_i(t)\frac{d^i x}{dt^i}\right]$$

est sa propre adjointe, et que l'expression

$$(28) \qquad A_0 x(t) + A_1 x'(t) + \ldots + A_p x^{(p)}(t),$$

$A_0, A_1, \ldots, A_p$ étant des fonctions de t, admet comme adjointe

$$(29) \qquad A_0 x(t) - \frac{d(A_1 x)}{dt} + \ldots + (-1)^p \frac{d^p(A_p x)}{dt^p}.$$

La condition pour que l'expression (28) soit identique à son adjointe s'exprime alors par un système d'équations différentielles vérifiées par les fonctions A, que l'on obtient en égalant les coefficients de chacune des dérivées de x dans les expressions (28) et (29). La première de ces équations, obtenue en égalant les coefficients de $x^{(p)}$, est

$$A_p = (-1)^p A_p.$$

Elle nous montre que p est pair, ou bien A_p nul. En retranchant de (28) une expression de la forme (27), on peut donc faire disparaître la dérivée de l'ordre le plus élevé. En recommençant la même opération, on fera disparaître tous les termes de l'expression (28). On voit donc que la condition nécessaire et suffisante pour que cette expression soit identique à son adjointe est qu'elle soit une somme de termes de la forme (27).

D'autre part, il résulte encore de la formule de définition (26) que l'expression

$$\int_0^1 \varphi(t, t)\,\delta x_1\,dt_1$$

admet pour adjointe

$$\int_0^1 \varphi(t_1, t)\,\delta x_1\,dt_1.$$

Elles sont identiques si φ est une fonction symétrique de ces deux arguments.

Considérons enfin l'expression plus générale

$$E(x) = A_0 x + A_1 x' + \ldots + A_p x^{(p)} + \int_0^1 \varphi(t, t_1)\, \delta x_1\, dt_1.$$

Elle ne peut être nulle, quelle que soit la fonction x, que si l'intégrale et les autres termes sont nuls séparément. Elle ne peut de même être identique à son adjointe que si les deux fonctionnelles définies par l'intégrale et par les autres termes jouissent séparément de cette propriété. Il faut et il suffit pour cela que la fonction $\varphi(t, t_1)$ soit symétrique en t et t_1 et que les termes dépendant spécialement du point t soient une somme d'expressions de la forme (27).

74. Application aux dérivées fonctionnelles. — Appliquons ces résultats à l'expression (23), qui doit être une fonctionnelle linéaire de δx identique à son adjointe. Il vient, en posant $p = 2q$,

$$(30) \qquad \delta U'_x = f_0(t)\,\delta x - \frac{d}{dt}[f_1(t)\,\delta x'] + \ldots + (-1)^q \frac{d^q}{dt^q}[f_q(s)\,\delta x^{(q)}] + \int_0^1 \varphi(t, t_1)\,\delta x_1\, dt_1,$$

la fonction $\varphi(t, t_1)$ étant symétrique en t et t_1.

Si l'on cherche à définir une fonctionnelle inconnue U d'après la donnée de sa dérivée fonctionnelle U'_x, il faut donc, pour que le problème soit possible, que $\delta U'_x$ soit de la forme (30). A cette condition, la condition (24) sera vérifiée quelles que soient les fonctions δx et $\delta_1 x$, et l'on peut dire que δU est une *différentielle exacte*. On voit que les conditions que nous venons de former jouent dans la théorie des équations aux dérivées fonctionnelles le même rôle que la condition

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$$

dans la théorie de l'équation aux différentielles totales

$$du = P\, dx + Q\, dy.$$

74. Nous pouvons maintenant former $\delta^2 U$. En différentiant δU, il vient

$$\delta^2 U = \int_0^1 (\delta U'_x\, \delta x + U'_x\, \delta^2 x)\, dt.$$

La fonction x étant l'argument de la fonctionnelle U, analogue à la variable indépendante d'une fonction ordinaire, nous pouvons supposer $\delta^2 x = 0$. Tenant compte alors de la formule (30) et rendant l'intégrale simple symétrique par une intégration par parties, il vient

$$(31) \qquad \delta^2 U = \int_0^1 [f_0(t)\,\delta x^2 + f_1(t)\,\delta x'^2 + \ldots + f_q(t)\,(\delta x^{(q)})^2]\,dt + \int_0^1\int_0^1 \varphi(t, t_1)\,\delta x\,\delta x_1\,dt\,dt_1.$$

Telle est la forme de la variation seconde d'une fonctionnelle, lorsque la variation de U'_x est de la forme (23). On remarque, d'après cette expression, que $\delta^2 U$, considéré comme dépendant de δx, a une continuité d'ordre q; la fonctionnelle U ne peut donc avoir qu'une continuité d'ordre q; elle aura en général cette continuité, tandis que U'_x a une continuité d'ordre $2q$. La dérivée fonctionnelle d'une fonctionnelle continue d'ordre q est donc seulement continue d'ordre $2q$.

GÉNÉRALISATIONS DIVERSES.

75. **Fonctions d'une ligne plane.** — Il y aurait lieu de reprendre, au point de vue des variations secondes, les différentes généralisations étudiées Chapitre IV. Nous nous contenterons d'examiner celles qui nous serviront dans les applications que nous avons en vue.

Soit d'abord Φ une fonction d'une ligne plane fermée C, ayant pour variation première, avec les notations de M. Hadamard (n° 59),

$$\delta\Phi = \int_C \Phi'_n\,\delta n\,ds.$$

Pour former la variation de cette expression, il faut préciser le déplacement du point M de la courbe correspondant à l'élément ds lorsque cette courbe se déforme. Nous supposerons ce déplacement normal à la courbe. $\delta\Phi'_n$ a alors un sens bien défini et est une fonction linéaire de δn, que nous désignerons par

$$\delta\Phi'_n = E(\delta n),$$

et l'on voit aisément que la variation de ds est

$$\delta\,ds = -k\,\delta n\,ds,$$

k étant la courbure de la ligne C en M, comptée positivement dans le même sens que δn. Il vient alors

$$(32) \qquad \delta\delta_1\Phi = \int_C [E(\delta n)\,\delta_1 n - k\Phi'_n\,\delta n\,\delta_1 n + \Phi'_n\,\delta\delta_1 n]\,ds.$$

Il y a lieu de se demander si la signification de $\delta\delta_1 n$ ne dépend pas de l'ordre des symboles δ et δ_1. Il est facile de s'assurer qu'il n'en est rien, Il suffit de prendre pour Φ l'intégrale d'une fonction de point $f(M)$ dans la région intérieure à C; la direction positive de la normale étant supposée dirigée vers l'extérieur, on a

$$\Phi'_n = f(M), \qquad \delta\Phi'_n = \frac{df}{dn}\,\delta n$$

et, par suite, la formule (31) s'écrit

$$\delta\delta_1\Phi = \int_C \left\{ \left[\frac{df}{dn} - kf(M)\right]\delta n\,\delta_1 n + f(M)\,\delta\delta_1 n \right\} ds.$$

Il en résulte que

$$\delta\delta_1\Phi - \delta_1\,\delta\Phi = 0 = \int_C f(M)\,(\delta\delta_1 n - \delta_1\,\delta n)\,ds.$$

Cette formule étant vérifiée quelle que soit la fonction $f(M)$, on a $\delta\delta_1 n = \delta_1\,\delta n$, c'est-à-dire que la signification de $\delta\delta_1 n$ est indépendante de l'ordre des opérations δ et δ_1. Cela n'était nullement évident *a priori*, comme on s'en rend compte en observant qu'il n'en est plus de même pour une variation troisième $\delta\delta_1\delta_2 n$, et que ce n'est pas cette quantité, mais la différence $\delta\delta_1\delta_2 n - \delta n\,\delta_1 n'\,\delta_2 n'$ ($\delta_1 n'$ et $\delta_2 n'$ désignant les dérivées de $\delta_1 n$ et $\delta_2 n$ par rapport à s), qui est indépendante de l'ordre des opérations δ, δ_1 et δ_2. On l'établit aisément en appliquant à la fonction $\delta_2 n$ le résultat que nous obtiendrons n° 77.

Revenant alors à la formule (32), nous voyons que *la condition nécessaire et suffisante pour que* $\delta\Phi$ *soit une différentielle exacte*, c'est-à-dire pour que $\delta\delta_1\Phi$ soit indépendant de l'ordre des opérations δ et δ_1, *est que l'expression* $E(\delta n)$ *soit identique à son adjointe.*

76. Fonctions d'une ligne plane et d'un point. — Considérons d'abord une fonction u_A dépendant d'un contour C et du point A et

définie aussi bien quand A est sur le contour C ou n'est pas sur ce contour. Lorsque C se déforme, A restant fixe, la variation de u_A est une fonctionnelle linéaire de δn, que nous représenterons par $H_A(\delta n)$.

Si maintenant nous considérons la valeur de u en un point M de C qui, lorsque ce contour se déforme, se déplace orthogonalement à lui en restant sur lui, la variation de u_M proviendra, non seulement de la variation de forme de la fonction u due à la déformation de C, mais aussi au déplacement du point M, et l'on aura

$$\delta u_M = H_M(\delta n) + \frac{du}{dn}\delta n. \tag{33}$$

Si nous considérons maintenant la dérivée normale $\frac{du}{dn}$ ou la dérivée $u' = \frac{du}{ds}$ relative à un déplacement de M sur C, ou une dérivée d'ordre quelconque de u par rapport aux coordonnées de M dans le système d'axes constitués par la tangente et la normale à C au point particulier considéré, la variation d'une telle dérivée comprendra trois termes, l'un dû à la variation de forme de la fonction u, le second dû au déplacement du point M, le troisième dû à ce que la direction de la tangente à C en M a varié. L'angle dont cette direction a varié a la valeur $\delta n' = \frac{d\,\delta n}{ds}$, si l'on compte les angles positivement dans le sens qui permet d'amener la direction positive de la tangente (celle qui correspond aux s croissants) sur la direction positive de la normale par une rotation d'un angle droit. On a ainsi

$$\left\{\begin{aligned} \delta\frac{du}{ds} &= \frac{d}{dn}H_M(\delta n) + \frac{d^2u}{dn^2}\delta n - \frac{du}{ds}\delta n', \\ \delta\frac{du}{ds} &= \frac{d}{ds}H_M(\delta n) + \frac{d^2u}{dt\,dn}\delta n + \frac{du}{dn}\delta n'. \end{aligned}\right. \tag{34}$$

Dans cette dernière formule, nous avons désigné par $\frac{d^2u}{dt\,dn}$ la dérivée de u dans le système d'axe constitué par la tangente et la normale à C en M. Cette quantité diffère de $\frac{d}{ds}\frac{du}{dn}$ parce que, lorsqu'on se déplace sur C de l'arc ds, la variation de $\frac{du}{dn}$ provient non seulement du déplacement du point M, mais de ce que la tangente à la courbe a tourné

d'un angle $k\,ds$. Il en est de même de la variation de $\frac{du}{ds}$, et l'on a

$$(35)\qquad \begin{cases} \frac{d}{ds}\frac{du}{dn} = \frac{d^2u}{dt\,dn} - k\frac{du}{ds}, \\ \frac{d^2u}{ds^2} = \frac{d^2u}{dt^2} + k\frac{du}{dn}. \end{cases}$$

77. Supposons en particulier que la forme de la fonction u_A soit indépendante de la ligne C. Les formules (33) et (34) se simplifient, et l'on peut aisément former la variation seconde de u_M, qui a la valeur

$$\delta\delta_1 u_M = \frac{du}{dn}\delta\delta_1 n + \frac{d^2u}{dn^2}\delta n\,\delta_1 n - u'\,\delta n'\,\delta_1 n.$$

De cette formule, et de ce que nous savons déjà sur le symbole $\delta\delta_1 n$, résulte que le premier membre change lorsqu'on intervertit les symboles δ et δ_1, mais qu'on peut former une quantité qui ne change pas, soit par exemple

$$(36)\qquad \delta\delta_1 u_M + u'\,\delta n'\,\delta_1 n = \delta_1\,\delta u_M + u'\,\delta_1 n'\,\delta n.$$

Cette circonstance pouvait être prévue autrement. Appelons toujours λ et μ les deux paramètres aux variations infiniment petites desquels correspondent les variations δ et δ_1. Si l'on fait varier λ et μ des quantités infiniment petites $d\lambda$ et $d\mu$, le point M, se déplaçant normalement à C, viendra occuper deux positions différentes M_1 et M_2 suivant que l'on aura fait varier d'abord λ, et ensuite μ, ou inversement. La fonction u prendra alors en ces points des valeurs différant de la quantité

$$(37)\qquad u_{M_2} - u_{M_1} = M_1M_2\,u' = \delta\delta_1 u_M - \delta_1\,\delta u_M.$$

La comparaison de cette formule et de la formule (36) montre que

$$(38)\qquad M_1M_2 = \delta n\,\delta_1 n' - \delta_1 n\,\delta n'.$$

Le raisonnement qui vient de nous conduire à la formule (37) s'applique, non seulement à la fonction particulière u que nous venons de considérer, mais à n'importe quelle fonction d'une ligne C et d'un point M de cette ligne, sans que cette fonction ait besoin d'être définie pour d'autres points que ceux de cette ligne. La for-

mule (36), qui résulte immédiatement des formules (37) et (38), s'applique donc à une telle fonction.

Par suite, *la condition nécessaire et suffisante pour que* δu_M *soit une différentielle exacte est que l'expression* $\delta\delta_1 u + u'\delta n'\,\delta_1 n$ *ne change pas si l'on intervertit l'ordre des opérations* δ *et* δ_1.

78. Fonctionnelles dépendant de deux fonctions ou d'une ligne et d'une fonction. — Si une fonctionnelle U dépendant de deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ est telle que

$$\delta U = \int_0^1 (U'_x\,\delta x + U'_y\,\delta y)\,dt,$$
$$\delta U'_x = E(\delta x) + F(\delta y),$$
$$\delta U'_y = \mathcal{F}(\delta x) + G(\delta y),$$

on voit aisément, en formant l'expression de $\delta\delta_1 U$, que chacune des expressions $E(\delta x)$ et $G(\delta y)$ est sa propre adjointe et que les expressions $F(\delta y)$ et $\mathcal{F}(\delta x)$ sont les adjointes l'une de l'autre.

Les choses sont un peu moins simples dans le cas d'une fonctionnelle Φ dépendant d'une ligne fermée C et d'une fonction u définie en chaque point de cette ligne. La variation première étant de la forme

$$\delta\Phi = \int_C (\Phi'_u\,\delta u + \Phi'_n\,\delta n)\,ds,$$

si nous voulons mettre en évidence des expressions qui soient les adjointes les unes des autres, les variations de Φ'_u et Φ'_n (les points dont dépendent ces fonctions étant toujours supposées avoir leur déplacement normal à C) doivent être mises sous la forme

$$(39)\qquad \begin{cases} \delta\Phi'_u = E(\delta u) + F(\delta n) + k\Phi'_u\,\delta n, \\ \delta\Phi'_n = \mathcal{F}(\delta u) + G(\delta n) + \Phi'_u u'\,\delta n'. \end{cases}$$

La variation seconde de Φ s'écrit alors

$$(40)\qquad \delta\delta_1\Phi = \int_C [E(\delta u)\,\delta_1 u + F(\delta n)\,\delta_1 u + \mathcal{F}(\delta u)\,\delta_1 n + G(\delta n)\,\delta_1 n]\,ds$$
$$+ \int_C [\Phi'_u(\delta\delta_1 u + u'\,\delta n'\,\delta_1 n) + \Phi'_n(\delta\delta_1 n - k\,\delta n\,\delta_1 n)]\,ds.$$

La dernière intégrale, d'après ce que nous savons déjà sur $\delta\delta_1 n$

et $\delta\delta_1 u$, ne change pas si l'on intervertit les symboles δ et δ_1. On a alors l'énoncé suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que $\delta\Phi$ *soit une différentielle exacte*, c'est-à-dire pour que $\delta\delta_1\Phi$ ne change pas si l'on intervertit les symboles δ et δ_1, *est que*, $\delta\Phi'_u$ *et* $\delta\Phi'_n$ *étant mis sous la forme* (39), *chacune des expressions* $E(\delta u)$ *et* $G(\delta n)$ *soit sa propre adjointe et que les expressions* $F(\delta n)$ *et* $\mathcal{F}(\delta u)$ *soient les adjointes l'une de l'autre.*

Un énoncé analogue s'obtient aisément dans le cas d'une fonctionnelle dépendant d'une ligne C et de plusieurs fonctions définies en chaque point de cette ligne.

Nous utiliserons les différents résultats qui précèdent dans la théorie des équations aux dérivées fonctionnelles.

CHAPITRE VI.

FONCTIONNELLES DE DEGRÉS QUELCONQUES.

SOMMAIRE : Variation d'ordre p et fonctionnelles entières et homogènes de degré p. — La série de Taylor. — Les fonctionnelles homogènes de Gateaux. — Les fonctionnelles de Gateaux non homogènes. — Séries de polynomes. — Propriétés des fonctionnelles de Gateaux. — Théorème de Gateaux : équivalence des propriétés G et G_1. — Comparaison des propriétés G et G_1.

79. **Variation d'ordre p et fonctionnelles entières et homogènes de degré p.** — Les résultats du Chapitre précédent s'étendent aisément aux fonctionnelles de degré quelconque. Une fonctionnelle entière et homogène de degré p est une fonctionnelle $U\,|[x]|$ telle que, $x_1(t)$ et $x_2(t)$ étant des fonctions quelconques, $U\,|[\lambda x_1 + \mu x_2]|$ soit un polynome homogène de degré p.

Nous dirons qu'une fonctionnelle U admet une variation $\delta^p U$ d'ordre p si l'expression

$$\delta^p U = \left\{ \frac{d^p}{d\lambda^p} U\,|[x + \lambda\,\delta x]| \right\}_{\lambda=0} \tag{1}$$

existe, et est entière et homogène de degré p en δx (si elle existe, elle est évidemment homogène de degré p, mais peut-être pas entière). Nous dirons que c'est une variation au sens de M. Fréchet si le rapport

$$\frac{U\,|[x+\delta x]| - U\,|[x] \quad - \delta U - \frac{1}{2}\delta^2 U - \ldots - \frac{1}{p!}\delta^p U}{||\,\delta x\,||^p}$$

tend vers zéro avec $||\,\delta x\,||$.

On obtient aisément pour les fonctionnelles entières et homogènes de degré p des formules généralisant celles de MM. Hadamard, Fréchet et Riesz. Au point de vue de M. Riesz, la notion d'une telle

fonctionnelle est liée à la notion d'une répartition de masses dans le volume V de l'espace E_p à p dimensions défini par les formules

$$0 < t_1 < 1, \qquad 0 < t_2 < 1, \qquad \ldots, \qquad 0 < t_p < 1.$$

Nous exclurons, pour obtenir une représentation commode, les répartitions introduisant des intégrales de Stieltjes. Nous exclurons aussi les masses finies situées en certains points, cette circonstance n'étant pas compatible avec la continuité dans le champ des fonctions de carrés sommables. Nous ne pouvons donc avoir que des masses réparties, avec une densité sommable, sur des variétés S à h dimensions (h variant de 1 à p), que nous représenterons paramétriquement par les formules

$$\begin{aligned} t_1 &= \theta_1(s_1, s_2, \ldots, s_h), \\ t_2 &= \theta_2(s_1, s_2, \ldots, s_h), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ t_p &= \theta_p(s_1, s_2, \ldots, s_h), \end{aligned}$$

le point $s_1, s_2, \ldots, s_h$ décrivant un certain domaine $\mathfrak{R}$. La fonctionnelle étudiée prend alors la forme

$$(2) \qquad U_p|[x]| = \sum \int\int \cdots \int_{\mathfrak{R}} \varphi(s_1, s_2, \ldots, s_h) x(\theta_1) x(\theta_2) \ldots x(\theta_p)\, ds_1\, ds_2 \ldots ds_h,$$

qui correspond, par son degré de généralité, à l'expression (11) du Chapitre précédent.

Nous appellerons *fonctionnelles normales* de degré p, en généralisant la définition du Chapitre précédent, les fonctionnelles dans la définition desquelles n'existent pas, quel que soit h variant de 1 à p, de groupes de h points *distincts* de l'intervalle (0, 1) jouant un rôle particulier; c'est-à-dire, d'une manière précise, que les variétés S sur lesquelles sont situées des masses, ne peuvent être définies que par des conditions telles que $t_i = t_j$. L'expression d'une fonctionnelle normale est donc

$$(3) \qquad U_p|[x]| = \sum \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \varphi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h}(t_1, t_2, \ldots, t_h) \times x^{\alpha_1}(t_1) x^{\alpha_2}(t_2) \ldots x^{\alpha_h}(t_h)\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_h,$$

la sommation s'étendant à tous les systèmes de valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$

positifs, et de somme p. Ainsi, pour $p = 3$, on a

$$U_3[[x]] = \int_0^1 \varphi_3(t)x^3(t)\,dt + \int_0^1\int_0^1 \varphi_{2,1}(t_1, t_2)x^2(t_1)x(t_2)\,dt_1\,dt_2$$
$$+ \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \varphi_{1,1,1}(t_1, t_2, t_3)x(t_1)x(t_2)x(t_3)\,dt_1\,dt_2\,dt_3.$$

On peut évidemment, sans restreindre la généralité, supposer chacune des fonctions φ symétrique par rapport aux variables t_i qui correspondent à des exposants α_i égaux.

Il est facile de former les dérivées fonctionnelles successives d'une fonctionnelle normale, et de vérifier que la variation de ces dérivées ne dépend jamais spécialement d'un point autre que ceux relativement auxquels la dérivation a été effectuée. Les dérivées d'ordre p sont indépendantes de $x(t)$; on a

$$U^{(p)}_{x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_h^{\alpha_h}} = \lambda\,\varphi_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_h}(t_1, t_2, \ldots, t_h),$$

λ étant un facteur constant facile à former.

Les autres fonctionnelles seront dites *fonctionnelles générales*. Dans leur définition interviennent certains groupes de h points ($h \leqq p$) jouant des rôles particuliers, et au moins une dérivée fonctionnelle d'ordre inférieure à p et relative à $h - 1$ points d'un de ces groupes dépend spécialement du dernier point du groupe.

On forme aisément les conditions pour que la fonctionnelle (3) soit définie, et par suite continue (*voir* remarque finale du n° 61), dans le champ des fonctions de carrés sommables. Pour qu'un terme de l'expression (2) soit défini dans ce champ, il est nécessaire et suffisant que :

1° Les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ soient tous égaux à 1 ou 2;

2° En désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$ ceux qui ont la valeur 2, l'intégrale

$$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 [\varphi_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_h}(t_1, t_2, \ldots, t_h)]^2\,dt_{i+1}\,dt_{i+2}\ldots dt_h$$

soit une fonction de $t_1, t_2, \ldots, t_i$ mesurable et bornée.

80. **La série de Taylor.** — Si une fonctionnelle admet des variations de tous les ordres, on peut la représenter par la série de

Taylor

$$(4) \qquad U|[x+\delta x]| = U|[x]| + \delta U + \frac{1}{2}\delta^2 U + \ldots + \frac{1}{p!}\delta^p U + \ldots$$

Pour obtenir cette formule, et préciser ses conditions d'application, il suffit de remplacer δx par $\lambda f(t)$, et de développer le premier membre en série suivant les puissances croissantes de λ.

81. **Les fonctionnelles homogènes de Gateaux.** — Cherchons d'abord à quelle condition une fonctionnelle normale de la forme (3) est une fonctionnelle de Gateaux. On trouve aisément pour la dérivée fonctionnelle d'un de ses termes

$$\sum_{i=1}^{i=h} \alpha_i x^{\alpha_i - 1}(t) \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \varphi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h}(t_1, \ldots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \ldots, t_h) \times \Pi' x^{\alpha_j}(t_j)\, dt_j,$$

Π' désignant un produit étendu aux valeurs $1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, h$ de l'indice j.

Si l'un des indices α_i n'est pas égal à 1, on voit que cette dérivée fonctionnelle dépend spécialement de $x(t)$, et U''_{x^2} n'est pas nul. On remarque en effet que, si plusieurs indices α_i sont égaux, les termes correspondants sont égaux, d'après la propriété de symétrie que nous avons supposée vérifiée par la fonction φ, et ne peuvent se détruire. La fonctionnelle normale (3) ne peut être une fonctionnelle de Gateaux que si $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_h = 1$, et par suite $h = p$. Une fonctionnelle normale de Gateaux, homogène et de degré p, est donc du type

$$(5) \qquad U_p|[x]| = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_p) \times x(t_1) x(t_2) \ldots x(t_p)\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_p.$$

Si l'on passe aux fonctionnelles générale (2), on constate de même aisément que, pour que U'_x ne dépende pas spéeialement de $x(t)$, c'est-à-dire que U soit une fonctionnelle de Gateaux, il faut et il suffit qu'aucun des facteurs $x(\theta)$ ne soit élevé au carré, c'est-à-dire que parmi les fonctions $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ il n'y en ait pas deux qui soient égales.

Ainsi la fonctionnelle

$$U = \int_0^1 f(t) x^2(t) x(1-t)\, dt$$

n'est pas une fonctionnelle de Gateaux; pour cette fonctionnelle

$$U''_{x^2} = 2f(t)x(1-t)$$

n'est pas nul. Par contre,

$$\int_0^1 f(t)x(t)x(1-t)x(\cos^2\pi t)\,dt,$$

$$\int_0^1 x(t)\,dt \int_0^{1-t} f(t, t_1)x(t_1)x(1-t-t_1)\,dt_1$$

sont des fonctionnelles de Gateaux.

82. Les fonctionnelles de Gateaux non homogènes. — Cherchons la condition pour qu'une fonctionnelle représentable par une série de Taylor soit une fonctionnelle de Gateaux. En écrivant o et λx dans la série de Taylor au lieu de x et δx, cette série fonctionnelle s'écrit

$$U = U_0 + \lambda U_1 + \ldots + \frac{\lambda^p}{p!} U_p + \ldots,$$

U_p désignant une fonctionnelle de $x(t)$, homogène et entière de degré p; U_0 en particulier est une constante.

Remplaçant x par $x + \mu\delta x$. dérivant par rapport à μ, et faisant $\mu = 0$, on obtient la formule

$$\delta U = \lambda\,\delta U_1 + \ldots + \frac{\lambda^p}{p!}\delta U_p + \ldots,$$

ou, en égalant les coefficients de δx dans les intégrales que représentent les deux membres,

$$U'_x = \lambda(U_1)'_x + \ldots + \frac{\lambda^p}{p!}(U_p)'_x + \ldots. \tag{6}$$

On a de même, par une nouvelle dérivation,

$$U''_{x^2} = \frac{\lambda^2}{2}(U_2)''_{x^2} + \ldots + \frac{\lambda^p}{p!}(U_p)''_{x^2} + \ldots, \tag{7}$$

$$U''_{xx_1} = \frac{\lambda^2}{2}(U_2)''_{xx_1} + \ldots + \frac{\lambda^p}{p!}(U_p)''_{xx_1} + \ldots. \tag{8}$$

La première de ces formules montre que U est une fonctionnelle de Gateaux si toutes les fonctionnelles U_p le sont.

En particulier, pour qu'une fonctionnelle représentable par une

série de Taylor soit une fonctionnelle normale de Gateaux, il faut qu'elle soit de la forme

$$(9)\quad U = U_0 + \int_0^1 \varphi_1(t)x(t)\,dt + \ldots$$
$$+ \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \varphi_p(t_1, t_2, \ldots, t_p)x(t_1)x(t_2)\ldots x(t_p)\,dt_1\,dt_2\ldots dt_p + \ldots.$$

Ces séries de Taylor ont été considérées par M. Volterra. Les considérations qui précèdent montrent bien leur degré de généralité parmi les fonctionnelles continues dans le champ des fonctions de carrés sommables, et ayant des variations de tous les ordres. Pour arriver à cette forme, il faut faire deux hypothèses restrictives : que la fonctionnelle soit normale, et de Gateaux.

83. **Séries de polynomes.** — On peut représenter par des séries de polynomes des fonctionnelles plus générales que celles représentables par une série de Taylor.

Un *polynome de degré p* est, par définition, une somme de fonctionnelles entières et homogènes de degrés 0, 1, ..., p. Si ces fonctionnelles sont normales, le polynome est dit *normal*. Si ce sont des fonctionnelles de Gateaux, le polynome est dit *de Gateaux*. Un polynome normal de Gateaux est alors une somme limitée de la forme (9).

Nous appellerons dans la suite $\mathfrak{D}$ le domaine des fonctions de carrés sommables dont le module fonctionnel ne dépasse pas un nombre $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{D}'$ le domaine des fonctions continues dont le module ne dépasse pas $\mathfrak{M}$. Une fonctionnelle définie et continue dans $\mathfrak{D}$ l'est *a fortiori* dans $\mathfrak{D}'$ (en prenant dans chacun de ces domaines la définition appropriée de la distance).

On a alors le théorème suivant, dû à M. Fréchet. La démonstration que nous donnerons est due à Gateaux.

Théorème. — *Si une fonctionnelle* U *est définie et continue dans le domaine* $\mathfrak{D}'$, *elle peut être définie dans ce domaine comme limite de polynomes normaux de Gateaux.*

Divisons l'intervalle (0, 1) en n intervalles égaux. Soit ξ_i la valeur moyenne de $x(t)$ dans l'intervalle $\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$. Désignons par

$x_n(t)$ la fonction définie par les formules

$$x_n(0) = x_n\left(\frac{1}{n}\right) = \xi_1, \qquad x_n\left(\frac{2}{n}\right) = \xi_2, \qquad \ldots, \qquad x_n(1) = \xi_n,$$

et par la condition de varier linéairement dans chacun des intervalles considérés. La fonctionnelle U étant certainement définie pour la fonction $x_n(t)$, posons

$$\mathrm{U}\,|\,[x_n(t)]\,| = u_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n).$$

Cette expression, en vertu de la continuité de la fonctionnelle U, est une fonction continue de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, et tend vers $\mathrm{U}\,|\,[x(t)]\,|$ quand n augmente indéfiniment.

La fonction continue u_n peut, dans le domaine considéré, défini par les inégalités

$$|\,\xi_1\,| \leqq \mathfrak{M}, \qquad |\,\xi_2\,| \leqq \mathfrak{M}, \qquad \ldots, \qquad |\,\xi_n\,| \leqq \mathfrak{M},$$

être représentée avec une erreur inférieure à tout nombre positif donné ε_n par un polynome $p_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Si l'on choisit pour les ε_n des valeurs tendant vers zéro quand n augmente indéfinie, la différence

$$|\,\mathrm{U}\,|\,[x(t)]\,| - p_n\,| < |\,\mathrm{U}\,|\,[x(t)] - u_n\,| + \varepsilon_n$$

tend vers zéro quand, la détermination de $x(t)$ restant fixe, n augmente indéfiniment. Les polynomes p_n ont donc pour limite la fonctionnelle U, mais la convergence n'est pas en général uniforme dans tout le domaine fonctionnel considéré.

Or p_n, considéré comme fonctionnelle de $x(t)$, est un polynome normal de Gateaux. En effet, en remplaçant les ξ_i par leurs valeurs

$$(10) \qquad \xi_i = n\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} x(t)\,dt,$$

chaque terme du polynome p_n prend la forme

$$(11) \qquad \int_0^1\int_0^1 \cdots \int_0^1 \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_p)\,x(t_1)\,x(t_2)\ldots x(t_p)\,dt_1\,dt_2\ldots dt_p.$$

la fonction φ ayant la valeur n^p dans une fraction égale à $\frac{1}{n^p}$ du champ

d'intégration et o dans le reste du champ. La quantité p_n, somme de ces termes, est un polynome normal de Gateaux, ce qui achève la démonstration du théorème énoncé.

84. Remarques. — 1° La fonction φ qui intervient dans l'expression (11) est discontinue. On peut éviter cet inconvénient en modifiant la définition des nombres ξ_i. Désignant par $\mu_n(t)$ une fonction continue, positive ou nulle dans l'intervalle (0, 1), ayant pour valeur moyenne 1 dans chacun des intervalles $\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$, et nulle aux points qui séparent ces intervalles, il suffit de poser

$$\xi_i = n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \mu_n(t) x(t)\, dt. \tag{12}$$

De même, on peut rendre continues les dérivées jusqu'à un certain ordre h de la fonction φ, en prenant pour μ_n une fonction admettant des dérivées d'ordres 1, 2, ..., h continues, et s'annulant aux points $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1 - \frac{1}{n}$.

2° Si la fonctionnelle U admet des variations première et seconde continues dans le domaine fonctionnel considéré, $u_n(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ est une fonction admettant des dérivées premières et secondes continues, et dont les différentielles première et seconde tendent respectivement vers les variations première et seconde de U quand n augmente indéfiniment, les déterminations considérées de $x(t)$ et $\delta x(t)$ restant fixes.

On peut alors choisir le polynome p_n de manière que, non seulement p_n diffère de u_n de moins de ε_n, mais que ses différentielles première et seconde diffèrent de moins de ε_n de celles de u_n, pour tout système de déterminations de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, d\xi_1, d\xi_2, \ldots, d\xi_n$, inférieures en module à $\mathfrak{M}$.

On obtient alors des polynomes de Gateaux $P_n|[x(t)]|$ qui tendent vers $U|[x(t)]|$, tandis que leurs variations première et seconde tendent vers celles de U.

Un résultat analogue peut naturellement être obtenu en considérant les variations jusqu'à un ordre quelconque.

3° On peut démontrer un théorème analogue en se plaçant dans le

domaine $\mathfrak{D}$ des fonctions $x(t)$ de carrés sommables, telles que

$$\int_0^1 x^2(t)\,dt \leqq \mathfrak{M}^2, \tag{13}$$

et en considérant une fonctionnelle U continue dans ce champ (définition de la continuité liée au voisinage en moyenne).

On ne peut que diminuer le premier membre de l'inégalité (13) en remplaçant $x(t)$ par sa valeur moyenne ξ_i dans chacun des intervalles $\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$. La fonction discontinue $x_n(t)$ ainsi formée vérifie donc encore la condition (13). Donc $U|[x_n(t)]|$ est une fonction continue de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, tendant vers $U|[x(t)]|$ quand n augmente indéfiniment. On arrive alors à un résultat analogue à celui du numéro précédent, le raisonnement se terminant de la même manière.

La remarque du 2° du présent numéro se généralise aussi à ce nouveau point de vue.

85. **Propriétés des fonctionnelles de Gateaux.** — Il est remarquable qu'une fonctionnelle continue quelconque soit obtenue comme limite, non de polynomes quelconques, mais de polynomes normaux de Gateaux. La propriété caractéristique des fonctionnelles de Gateaux disparaît donc à la limite.

Il est naturel de penser qu'elle ne disparaît pas à la limite si la convergence est uniforme dans le domaine fonctionnel considéré, et que par suite les fonctionnelles de Gateaux, dans le domaine $\mathfrak{D}$ ou dans le domaine $\mathfrak{D}'$, peuvent être caractérisées par la propriété suivante : *elles peuvent être définies comme limites de polynomes normaux de Gateaux, la convergence étant uniforme dans le domaine considéré.*

Nous appellerons cette propriété : *propriété* $\mathcal{G}$. Nous appellerons *propriété* $\mathcal{G}'$ celle qui nous a servi jusqu'ici à définir les fonctionnelles de Gateaux.

Nous dirons enfin qu'une fonctionnelle a la *propriété* $\mathcal{G}_1$ dans le domaine $\mathfrak{D}$ si :

1° *Elle est uniformément continue dans le domaine* $\mathfrak{D}$;

2° *Quel que soit* ε *positif, on peut déterminer* n *tel que*

$$|U|[x]| - U|[x_n]|| < \varepsilon, \tag{14}$$

$x(t)$ *étant une fonction quelconque du domaine* $\mathfrak{D}$ *et* $x_n(t)$ *étant*

la fonction égale, dans chacun des intervalles $\left(\frac{i-n}{n}, \frac{i}{n}\right)$, *à la valeur moyenne de* $x(t)$ *dans cet intervalle;* cette fonction appartient nécessairement au domaine $\mathfrak{D}$.

Nous allons d'abord démontrer l'identité des propriétés $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}_1$. Nous comparerons ensuite les propriétés $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$.

86. Théorème de Gateaux : équivalence des propriétés $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}_1$. — Nous nous placerons dans le cas de fonctionnelles vérifiant ces propriétés dans le domaine $\mathfrak{D}$. Il en résultera des différences de détails avec les raisonnements de Gateaux, qui s'était placé dans le domaine $\mathfrak{D}'$.

Les polynomes normaux de Gateaux considérés, devant être définis dans tout le domaine $\mathfrak{D}$, sont formés avec des fonctions φ_p de carrés sommables.

1° *La propriété* $\mathcal{G}$ *entraîne la propriété* $\mathcal{G}_1$. — La propriété $\mathcal{G}_1$ étant évidemment une propriété qui se conserve à la limite, si U tend uniformément vers une limite dans tout le domaine $\mathfrak{D}$, il suffit de vérifier que la propriété $\mathcal{G}_1$ appartient aux polynomes de Gateaux, et pour cela de vérifier qu'elle appartient à un de leurs termes, c'est-à-dire à la fonctionnelle

$$(15)\qquad \int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_p)x(t_1)x(t_2)\ldots x(t_p)\,dt_1\,dt_2\ldots dt_p,$$

la fonction φ étant symétrique et de carré sommable. On peut alors la remplacer par une fonction continue et symétrique qui en approche en moyenne de moins que tout nombre donné ε'; l'erreur qui en résultera sur l'intégrale (15) sera, dans tout le domaine $\mathfrak{D}$, inférieure à $\varepsilon'\mathfrak{M}^p$, et cela ne change rien en ce qui concerne la propriété $\mathcal{G}_1$.

Il suffit maintenant de démontrer que l'on commet une erreur aussi petite que l'on veut en remplaçant $x(t)$ par $x_n(t)$ *successivement* dans les p facteurs de la fonction intégrée dans l'expression (15), c'est-à-dire que

$$(16)\qquad \int_0^1\cdots\int_0^1 y_2(t_2)\ldots y_p(t_p)\,dt_2\ldots dt_p$$
$$\times\int_0^1 \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_p)[x(t_1)-x_n(t_1)]\,dt_1,$$

est, pour n assez grand, inférieur dans tout le domaine $\mathfrak{D}$ à tout nombre donné ε; $y_2, \ldots, y_p$ désignent, soit x, soit x_n, en tout cas des fonctions du domaine $\mathfrak{D}$.

La fonction φ étant continue, et par suite uniformément continue, peut être remplacée, si n est assez grand, par $\varphi_1 + \varphi_2$, φ_1 étant constant quand t_1 varie dans chacun des intervalles $\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$, les autres variables $t_2, \ldots, t_p$ restant constantes, et φ_2 ayant son module inférieur à un nombre η si petit qu'on veut. Le terme de l'expression (16) provenant de φ_1 est nul, puisque $x(t_1) - x_n(t_1)$ a sa valeur moyenne nulle dans tout l'intervalle considéré; l'autre terme, et par suite l'expression (16), est inférieur à $2\eta\,\mathfrak{M}^p$, quantité aussi petite que l'on veut. C. Q. F. D.

2° *La propriété* $\mathcal{G}_1$ *entraîne la propriété* $\mathcal{G}$. — Pour démontrer ce résultat, il suffit de former un polynome normal de Gateaux P_n qui diffère de U, dans tout le domaine $\mathfrak{D}$, d'une quantité inférieure à ε. On y arrive aisément en suivant la voie indiquée n° 84, 3°. Remplaçant d'abord $U|[x(t)]|$ par

$$U|[x_n(t)]| = u_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

nous commettons une erreur qui, pour n assez grand, d'après la propriété $\mathcal{G}_1$, 2°, est inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$, non seulement pour chaque fonction $x(t)$, mais dans tout le domaine $\mathfrak{D}$.

La fonction u_n, évidemment continue, et que l'on n'a à considérer que dans le domaine fini

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2 = n\int_0^1 x_n^2(t)\,dt \leqq n\,\mathfrak{M}^2,$$

peut être remplacée, avec une nouvelle erreur inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$, par un polynome normal de Gateaux

$$p_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = P_n|[x(t)]|, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

87. **Remarques.** — 1° Dans la deuxième partie de la démonstration précédente, l'hypothèse de la continuité uniforme de $U|[x(t)]|$ n'a pas servi. On peut la remplacer par l'hypothèse de la continuité simple, même par l'hypothèse encore moins restrictive de la continuité simple, la définition considérée étant celle liée au voisinage

uniforme; si la fonctionnelle U est ainsi définie et continue dans le domaine $\mathfrak{D}$, et jouit de la propriété $\mathcal{G}_1$, 2°, le raisonnement subsiste; elle jouit de la propriété $\mathcal{G}$ et, par suite, de la propriété $\mathcal{G}_1$ telle que nous l'avons énoncée. Elle est uniformément continue dans le domaine fonctionnel $\mathfrak{D}$ considéré, la définition considérée de la continuité étant celle liée au voisinage en moyenne, celle qui est la définition naturelle dans le domaine $\mathfrak{D}$.

A première vue, on aurait pu penser qu'il y a plusieurs sortes de fonctionnelles jouissant de la propriété $\mathcal{G}_1$, suivant la définition que l'on adopte de la distance de deux fonctions, et par suite de la continuité. On voit par la remarque qui précède que, dans un champ fonctionnel déterminé, une définition déterminée s'impose, et qu'il est plus exact de dire que les différentes sortes de fonctionnelles considérées se distinguent par le champ fonctionnel dans lequel elles sont définies et continues. Ceci précise les remarques du n° 13.

2° Dans l'énoncé de la propriété $\mathcal{G}_1$, nous avons considéré des intervalles égaux pour simplifier le langage. On ne changerait rien d'essentiel aux raisonnements et, par suite, on aurait une propriété équivalente à la propriété $\mathcal{G}_1$ si l'on prenait une loi différente pour la division de l'intervalle (0, 1), ou bien si l'on ne précisait pas une loi déterminée.

3° Une remarque analogue à celle du n° 84, 3°, peut être faite au sujet de la propriété $\mathcal{G}_1$. Il peut arriver qu'une fonctionnelle vérifiant cette propriété n'admette pas de variation, ou bien en admette une qui, *considérée comme fonction de* $x(t)$, ne vérifie pas cette propriété. Mais, si δU vérifie la propriété $\mathcal{G}_1$, on peut définir le polynome P_n de manière que, non seulement $U - P_n$, mais $\delta U - \delta P_n$, aient leurs modules inférieurs à ε pour toutes les déterminations de $x(t)$ et $\delta x(t)$ intérieures au domaine $\mathfrak{D}$.

Nous généraliserons les notions des propriétés $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}_1$, et les principaux résultats qui précèdent dans le dernier Chapitre de la troisième Partie.

88. **Comparaison des propriétés $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$.** — Il n'y a évidemment pas identité complète entre ces deux propriétés. La première n'implique pas l'existence des dérivées fonctionnelles; la seconde suppose au moins l'existence de la dérivée fonctionnelle première. On peut, d'ailleurs, l'énoncer sans supposer l'existence de la variation seconde

$\delta^2 U$ et de la dérivée fonctionnelle U''_{xx_1}. En effet, la condition $U''_{x^2} = 0$ signifie que, la variation $\delta x(t)$ étant en valeur absolue inférieure à h dans l'intervalle $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$, et nulle en dehors de cet intervalle, la valeur au point t du rapport $\frac{\delta U'_x}{h}$ tend nécessairement vers zéro avec h et ε, sauf peut-être pour des points constituant un ensemble de mesure nulle.

Nous allons montrer l'équivalence des propriétés $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ pour les fonctionnelles vérifiant les conditions suivantes :

1° Existence, dans le domaine $\mathfrak{D}$, d'une variation première normale et d'une variation seconde.

2° La dérivée U'_x est continue par rapport à t, les différentes fonctions de t obtenues en faisant varier $x(t)$ étant également continues.

3° La répartition des masses liées à $\delta^2 U$ est, dans la bande $|t - t_1| < l$, la même que pour une fonctionnelle normale, et U''_{xx_1} est dans cette bande inférieure en module à K, l étant aussi petit, K aussi grand qu'on veut, mais tous deux indépendants de $x(t)$.

4° La dérivée U''_{x^2} est continue, tant par rapport à t que comme fonctionnelle de $x(t)$.

On pourrait d'ailleurs aisément remplacer cette dernière condition par la condition moins restrictive que le point de l'espace fonctionnel qui représente la fonction U''_{x^2} de t dépende d'une manière continue de celui qui représente $x(t)$; il suffit que U''_{x^2}, considéré comme fonction de t, soit de carré sommable, pour que cette condition ait un sens très précis.

89. Divisons l'intervalle $(0, 1)$ en n intervalles égaux, le nombre n étant pris assez grand pour que $|t' - t| \leqq \frac{1}{n}$ entraîne dans tout le domaine $\mathfrak{D}$

$$|U'_{x(t')} - U'_{x(t)}| \leqq \eta. \tag{17}$$

η étant un nombre positif arbitrairement petit. Cela est possible, d'après l'hypothèse ci-dessus, relative à U'_x.

Désignons par $f(t)$ et $F(t)$ deux fonctions du domaine $\mathfrak{D}$ ayant même valeur moyenne dans chacun des intervalles $\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$, et par $f_i(t)$ la fonction égale à $f(t)$ de 0 à $\frac{i}{n}$ et à $F(t)$ de $\frac{i}{n}$ à 1.

Posons

$$g(t) = F(t) - f(t),$$
$$g_i(t) = f_i(t) - f_{i-1}(t),$$
$$\varphi_i(\lambda) = U|[f_{i-1}(t) + \lambda g_i(t)]|.$$

La différence $U|[F(t)]| - U|[f(t)]|$, qui intervient dans l'énoncé de la propriété $\mathcal{G}_1$ équivalente à la propriété $\mathcal{G}$, est la somme de n termes, dépendant de l'indice i, dont l'un quelconque s'écrit

$$U|[f_i(t)]| - U|[f_{i-1}(t)]| = \int_0^1 \varphi_i'(\lambda)\, d\lambda = \varphi_i'(1) - \int_0^1 \lambda \varphi_i''(\lambda)\, d\lambda.$$

On en déduit

$$(18) \qquad U|[F(t)]| - U|[f(t)]| = \sum_{i=1}^{i=n} \varphi_i'(1) - \sum_{i=1}^{i=n} \int_0^1 \lambda \varphi_i''(\lambda)\, d\lambda.$$

Calculons d'abord $\varphi_i'(1)$. On a

$$\varphi_i'(1) = \int_0^1 U_x'|[f_i(t)]|\, g_i(t)\, dt = \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} U_x'|[f_i(t)]|\, g(t)\, dt.$$

Dans cette intégrale, remplaçons U_x' par sa valeur en un point déterminé de l'intervalle considéré; elle devient nulle, puisque la valeur moyenne de $g(t)$ dans cet intervalle est nulle. L'erreur sur U_x', d'après la formule (17), est au plus égale à η; l'erreur sur $\varphi_i'(1)$ est donc au plus égale à

$$\eta \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} |g(t)|\, dt,$$

et l'erreur sur la première partie de l'expression (18), à

$$\eta \int_0^1 |g(t)|\, dt \leqq 2\eta \mathfrak{M},$$

quantité aussi petite que l'on veut.

Or la propriété $\mathcal{G}$ est équivalente à la propriété $\mathcal{G}'$, 2°, puisque nous ne nous occupons que de fonctionnelles continues admettant une variation. Elle équivaut donc à la propriété que l'expression (18) puisse être rendue aussi petite que l'on veut; la première partie de cette expression étant aussi petite que l'on veut, nous sommes

ramenés à démontrer que l'expression

$$(19) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \int_0^1 \lambda \varphi_i''(\lambda)\, d\lambda$$

peut être rendue aussi petite que l'on veut pourvu que n soit assez grand, lorsque $U''_{x^2} = 0$, et dans ce cas seulement.

90. 1° Supposons d'abord que $U''_{x^2} = 0$, et que U''_{xx_1} soit nul aussi pour $t - t_1$ assez petit, de sorte que, dans la répartition de masses liée à $\delta^2 U$, il n'y ait pas de masses dans le voisinage de la droite $t = t_1$.

La dérivée $\varphi_i''(\lambda)$ n'est autre chose que la variation seconde de U, calculée pour

$$x(t) = f_{i-1}(t) + \lambda g_i(t), \qquad \delta x(t) = g_i(t).$$

La détermination de $\delta x(t)$ n'étant différente de zéro que dans l'intervalle $\left(\frac{i-n}{n}, \frac{i}{n}\right)$, l'intégrale qui exprime $\delta^2 U$ devra être étendue seulement au carré

$$\frac{i-1}{n} < t < \frac{i}{n}, \qquad \frac{i-1}{n} < t_1 < \frac{i}{n}.$$

Or il n'y aura pas de masse dans ce carré, pourvu que n soit assez grand. Par suite, l'expression (19) sera non seulement aussi petite que l'on veut, mais rigoureusement nulle.

2° Supposons maintenant toujours $U''_{x^2} = 0$, mais n'imposons plus à U''_{xx_1} d'autre hypothèse que celle faite dans l'énoncé (n° 88, 3°). On aura alors

$$\begin{aligned}\varphi_i''(\lambda) &= \int_0^1 \int_0^1 U''_{xx_1} | [f_{i-1} + \lambda g_i] | g_i(t) g_i(t_1)\, dt\, dt_1 \\ &= \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i-1}{n}} U''_{xx_1} | [f_{i-1} + \lambda g_i] | g(t) g(t_1)\, dt\, dt_1,\end{aligned}$$

d'où

$$|\varphi_i''(\lambda)| \leqq \frac{K}{n} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} g^2(t)\, dt,$$

et l'expression (19) est au plus égale à

$$\frac{K}{n}\int_0^1 g^2(t)\,dt \leqq \frac{4K\mathfrak{M}^2}{n}.$$

Le résultat obtenu est donc encore démontré.

3° Il reste à se placer dans le cas où U''_{x^2} n'est pas nul, et à montrer qu'on peut s'arranger dans ce cas pour que l'expression (19) reste, quelque grand que soit n, supérieure en valeur absolue à un nombre fixe C, d'ailleurs aussi petit qu'il sera nécessaire.

Le terme qui provient de U''_{xx_1} tendant vers zéro, il suffit de tenir compte du terme qui provient de U''_{x^2}, qui s'écrit

$$(20)\qquad \sum_{i=1}^{i=n}\int_0^1 \lambda\,d\lambda \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} U''_{x^2}\,|\,[f_{i-1}+\lambda g_i]\,|\,g^2(t)\,dt.$$

Or, U''_{x^2} n'étant pas nul, on peut, en vertu de l'hypothèse de la continuité (n° 88, 4°), choisir un petit intervalle (t_1, t_2) dans l'intervalle $(0, 1)$, et une petite sphère du domaine $\mathfrak{D}$ de centre $f(t)$ et de rayon r, telle que U''_{x^2} soit d'un signe déterminé, par exemple positif, et supérieur à un nombre fixe m, si t est dans l'intervalle (t_1, t_2) et $x(t)$ dans cette sphère. Prenons $F(t)$ sur la surface de cette sphère et ne différant de $f(t)$ que dans l'intervalle (t_1, t_2). L'expression (20) est évidemment supérieure, quelque grand que soit n, à

$$\int_0^1 \lambda\,d\lambda \int_{t_1}^{t_2} m\,g^2(t)\,dt = \frac{mr^2}{2},$$

ce qui achève de démontrer le théorème énoncé.

Les propriétés $\mathcal{G}$, ou $\mathcal{G}_1$, apparaissent donc comme équivalentes à la propriété $\mathcal{G}'$, sous des conditions très peu restrictives, et le sont probablement toutes les fois que l'énoncé de ces propriétés a un sens. Mais elles conservent un sens dans certain cas où la propriété $\mathcal{G}'$ n'en a pas. Aussi paraît-il indiqué de modifier un peu désormais la définition des fonctionnelles de Gateaux, en les définissant par la propriété $\mathcal{G}$ ou par la propriété équivalente $\mathcal{G}_1$.

CHAPITRE VII.

CONSIDÉRATIONS GÉOMÉTRIQUES. NOTIONS SUR LES SÉRIES DE FONCTIONS ORTHOGONALES.

SOMMAIRE : Variétés linéaires à n dimensions dans l'espace fonctionnel; expression de la distance. — Définition des angles. — Composantes d'un vecteur donné. — Choix d'axes rectangulaires dans une variété linéaire quelconque. — Variétés linéaires à une infinité de dimensions. — Suites complètes et suites incomplètes. — Changement d'axes rectangulaires dans l'espace fonctionnel. — La fonctionnelle considérée comme fonction d'une infinité dénombrable de variables indépendantes.

91. Variétés linéaires à n dimensions dans l'espace fonctionnel. Expression de la distance. — Considérons $n+1$ fonctions $f_0(t)$, $f_1(t)$, ..., $f_n(t)$ données. Les points de l'espace fonctionnel représentant les fonctions

$$x(t) = f_0(t) + a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \ldots + a_n f_n(t)$$

constituent une *variété linéaire* à n dimensions ou *plan* P_n. Les quantités a_1, a_2, ..., a_n peuvent être considérées comme des *coordonnées* dans ce plan.

Nous considérerons des plans contenant l'origine, c'est-à-dire le point qui représente la fonction $x(t) \equiv 0$. On peut alors représenter l'ensemble des points du plan P_n par la formule

$$x(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \ldots + a_n f_n(t). \tag{1}$$

Considérons la distance r d'un point à l'origine. Nous prendrons la définition de la distance donnée par la formule

$$r^2 = \int_0^1 x^2(t)\, dt,$$

définition qui est celle que nous avons surtout considérée jusqu'ici et

que nous considérerons exclusivement dans la suite. Pour une fonction du plan P_n, on a

$$r^2 = \sum_i A_i a_i^2 + 2\sum_{i,j} A_{i,j} a_i a_j,$$

les coefficients A_i et $A_{i,j}$ ayant des valeurs faciles à former.

Il peut arriver que cette formule prenne la forme

$$r^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2. \tag{2}$$

Il faut et il suffit pour cela que l'on ait

$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^1 f_i^2(t)\,dt = 1, \\ &\int_0^1 f_i(t) f_j(t)\,dt = 0 \qquad (i, j, = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Lorsque la première de ces conditions est vérifiée par une fonction $f_i(t)$, on dit que cette fonction est *normale;* lorsque la deuxième est vérifiée, on dit que les fonctions $f_i(t)$ et $f_j(t)$ sont *orthogonales.*

Supposons donc que les fonctions $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ constituent un système de fonctions orthogonales et normales, de sorte que la formule (2) est applicable. De même la distance ρ des points qui représentent les fonctions $x(t)$ et

$$y(t) = b_1 f_1(t) + b_2 f_2(t) + \ldots + b_n f_n(t) \tag{4}$$

est alors donnée par la formule

$$\rho^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2.$$

Ces formules montrent que le plan P_n est identique à l'espace E_n de la géométrie à n dimensions, les coordonnées considérées étant rectangulaires. Autrement dit, une figure étant définie par les distances de ses points deux à deux, une figure formée par des points du plan P_n est identique à la figure formée par les points ayant respectivement les mêmes coordonnées dans l'espace E_n. On peut donc dire que le plan P_n est un hyperespace ordinaire à n dimensions.

92. **Définition des angles.** — Considérons deux vecteurs OM et OM′, de longueurs respectives r et r', représentant des fonctions $x(t)$ et $y(t)$. On appelle *angle de ces vecteurs* l'angle θ défini par la

formule

$$rr' \cos\theta = \int_0^1 x(t)\,y(t)\,dt.$$

En remplaçant $x(t)$ et $y(t)$ par les expressions (1) et (4), et tenant compte des formules (3), il vient

$$rr' \cos\theta = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n.$$

Cette formule montre que, pour les fonctions du plan P_n, il y a identité entre cette définition et la définition habituelle de l'angle dans l'espace à n dimensions.

On peut de même appeler $rr' \cos\theta$ *produit scalaire* des fonctions $x(t)$ et $y(t)$, et $r' \cos\theta \frac{x(t)}{r}$ *projection* de la fonction $y(t)$ sur le vecteur OM. Ces définitions sont identiques à celles employées dans l'espace à n dimensions.

Si l'on considère une figure de l'espace fonctionnel, formée d'un nombre fini de points, on peut la considérer comme tracée dans le plan défini par ces points. Dans ce plan, les relations de la géométrie ordinaire s'appliquent. Les relations connues entre les angles et les côtés d'un triangle, entre les faces et les dièdres d'un trièdre (la définition du dièdre étant la même que dans la géométrie ordinaire), s'appliquent donc.

On remarque que la définition des fonctions orthogonales donnée n° 91 n'est qu'un cas particulier de la définition que nous venons de donner de l'angle de deux vecteurs; deux fonctions orthogonales sont représentées par des vecteurs dont l'angle est droit.

Si un vecteur OM est la résultante de vecteurs $OM_1, OM_2, \ldots, OM_p$ orthogonaux deux à deux, on a évidemment

$$OM^2 = OM_1^2 + OM_2^2 + \ldots + OM_p^2.$$

93. **Composantes d'un vecteur donné.** — Soit OM un vecteur du plan P_n, représentant une fonction $x(t)$ de la forme (1). Nous supposons qu'on sache qu'elle est de la forme (1), mais qu'on ne connaisse pas les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$. On les détermine aisément par la formule

$$a_i = \int_0^1 f_i(t)\,x(t)\,dt. \tag{5}$$

Géométriquement, cela revient à écrire que a_i est la longueur de la projection de la fonction $x(t)$ sur l'axe des a_i [1].

Si l'on ne sait pas si $x(t)$ est de la forme (1), on peut calculer les coefficients a_i par la formule (5), et former la fonction

$$(6) \qquad X(t) \equiv a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \ldots + a_n f_n(t).$$

Elle ne coïncide pas avec $x(t)$ en général; mais, en posant

$$x(t) = X(t) + \xi(t),$$

on a

$$\int_0^1 f_i(t)\xi(t)\,dt = \int_0^1 f_i(t)\,[X(t) - x(t)]\,dt = a_i - a_i = 0.$$

La fonction $\xi(t)$ est donc orthogonale à tous les $f_i(t)$, et par suite à toutes les fonctions de la forme (1); elle est orthogonale au plan P_n. Les formules (5) et (6) nous conduisent donc à la décomposition du vecteur OM en un vecteur OH du plan P_n, représentant la fonction $X(t)$, et un vecteur HM, normal à ce plan, représentant $\xi(t)$. On a évidemment

$$(7) \qquad \begin{aligned} \int_0^1 x^2(t)\,dt &= \int_0^1 X^2(t)\,dt + \int_0^1 \xi^2(t)\,dt \\ &= a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + \int_0^1 \xi^2(t)\,dt. \end{aligned}$$

94. Choix d'axes rectangulaires dans une variété linéaire quelconque. — Nous allons montrer que les conditions (3) ne restreignent nullement la notion de variété linéaire, mais que dans une variété linéaire quelconque, représentée par la formule

$$(8) \qquad x(t) = \alpha_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 \varphi_2(t) + \ldots + \alpha_n \varphi_n(t),$$

on peut choisir n fonctions orthogonales et normales $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ telles que la formule (1) représente la même variété.

Bien entendu, nous supposons les fonctions $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ linéairement indépendantes; dans le cas contraire, on aurait une

---

[1] La quantité a_i représente évidemment la plus courte distance du point $x(t)$ à n'importe quel point, non seulement du plan P_n, mais même de l'espace fonctionnel, pour lequel a_i soit nul. C'est la distance au plan $a_i = 0$. Si la fonction $f_i(t)$ n'était pas normale, il y aurait lieu de diviser l'intégrale (5) par sa moyenne quadratique.

variété à moins de n dimensions, et l'introduction de certaines de ces fonctions serait inutile.

Nous emploierons le langage géométrique et chercherons à déterminer les vecteurs $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$ qui représentent les fonctions $f_i(t)$. Prenons d'abord OA_1 de longueur unité et dirigé suivant le vecteur OM_1 qui représente $\varphi_1(t)$. Décomposons ensuite le vecteur OM_2 qui représente $\varphi_2(t)$ en OH_2 dirigé suivant OA_1 (c'est-à-dire OM_1), et H_2M_2 normal à cette direction; prenons OA_2 parallèle à H_2M_2 et de longueur unité. Décomposons de même OM_3 en OH_3 situé dans le plan OA_1A_2 (qui n'est autre que OM_1M_2), et H_3M_3 perpendiculaire à ce plan; prenons OA_3 parallèle à H_3M_3 et de longueur unité. Continuant de même, nous obtenons n vecteurs $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$, de longueurs égales à l'unité et orthogonaux deux à deux, qui déterminent une variété linéaire à n dimensions évidemment identique à celle donnée. Le résultat cherché est donc obtenu.

Ainsi la variété (8) est du type étudié n°s 91 à 93; seulement, elle est rapportée à des coordonnées obliques. On peut la rapporter à des coordonnées rectangulaires, et les formules permettant de passer d'un système à l'autre ne sont autres que les formules habituelles du changement de coordonnées.

On peut considérer en particulier des changements de coordonnées rectangulaires. Il est facile de retrouver dans ce cas les formules de la géométrie ordinaire. Pour qu'on soit dans ce cas, il faut et il suffit que les fonctions $\varphi_i(t)$ soient orthogonales et normales, c'est-à-dire, en posant

$$(9)\qquad \varphi_i(t) = c_{1,i}f_1(t) + c_{2,i}f_2(t) + \ldots + c_{n,i}f_n(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

que

$$(10)\qquad \begin{cases} c_{1,i}^2 + c_{2,i}^2 + \ldots + c_{n,i}^2 = 1, \\ c_{1,i}c_{1,j} + c_{2,i}c_{2,j} + \ldots + c_{n,i}c_{n,j} = 0. \end{cases}$$

On peut inversement exprimer les $f_h(t)$ en fonction des $\varphi_i(t)$ par résolution du système (9). On trouve évidemment

$$f_h(t) = C_{h,1}\varphi_1(t) + C_{h,2}\varphi_2(t) + \ldots + C_{h,n}\varphi_n(t),$$

avec

$$C_{h,i} = \int_0^1 f_h(t)\varphi_i(t)\,dt = c_{h,i},$$

c'est-à-dire

$$(11)\quad f_h(t) = c_{h,1}\varphi_1(t) + c_{h,2}\varphi_2(t) + \ldots + c_{h,n}\varphi_n(t), \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Comme d'ailleurs les $f_h(t)$ sont des fonctions orthogonales et normales, il vient

$$(12)\quad \begin{cases} c_{h,1}^2 + c_{h,2}^2 + \ldots + c_{h,n}^2 = 1, \\ c_{h,1}c_{k,1} + c_{h,2}c_{k,2} + \ldots + c_{h,n}c_{k,n} = 0 \\ \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n; \quad h \neq k). \end{cases}$$

Ces formules, par la manière dont nous les avons obtenues, résultent des formules (10). On peut de même, inversement, déduire les formules (10) des formules (12); les systèmes (10) et (12) sont donc équivalents.

D'autre part, la comparaison des formules (1), (8), (9) et (11) donne sans peine les formules

$$(13)\qquad a_h = c_{h,1}\alpha_1 + c_{h,2}\alpha_2 + \ldots + c_{h,n}\alpha_n,$$

$$(14)\qquad \alpha_i = c_{1,i}a_1 + c_{2,i}a_2 + \ldots + c_{n,i}a_n,$$

qui permettent de passer du système de coordonnées $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ aux coordonnées $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ou inversement.

95. Variétés linéaires à une infinité de dimensions. — Considérons maintenant une suite indéfinie de fonctions

$$f_1(t), \quad f_2(t), \quad \ldots, \quad f_n(t), \quad \ldots,$$

orthogonales deux à deux et normales. La formule

$$(15)\qquad x(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \ldots + a_n f_n(t) + \ldots,$$

qui généralise la formule (1), définit une variété linéaire, ou plan, à une infinité de dimensions, contenant l'origine. Soit P cette variété.

Les remarques faites au sujet des plans P_n s'étendent sans difficulté à ces variétés à une infinité de dimensions. Ainsi l'hypothèse que les fonctions $f_i(t)$ soient orthogonales et normales ne restreint en rien la généralité de la notion de plan P.

Si l'on sait qu'une fonction est représentable par une série de la forme (15), on peut encore en obtenir les coefficients par la formule (5).

Prenons maintenant une fonction $x(t)$ de carré sommable, à cela près quelconque. Calculons les coefficients a_i par la formule (5), et

formons la série

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \ldots + a_n f_n(t) + \ldots. \tag{16}$$

Il s'agit d'étudier si elle représente une fonction, et si cette fonction est ou non $x(t)$.

Appelons $X_n(t)$ la somme des n premiers termes, et posons

$$x(t) = X_n(t) + \xi_n(t).$$

La formule (7) donne

$$\int_0^1 x^2(t)\,dt = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + \int_0^1 \xi_n^2(t)\,dt,$$

d'où résulte que la série Σa_n^2 est convergente, sa somme étant au plus égale au premier membre.

Appelons A_n le point de l'espace fonctionnel qui représente la fonction $X_n(t)$. Si $n' > n > N$, on a

$$\overline{A_n A_{n'}}^2 = a_{n+1}^2 + \ldots + a_{n'}^2 \leqq a_{N+1}^2 + a_{N+2}^2 + \ldots,$$

quantité aussi petite qu'on le veut si N est assez grand. Donc A_n tend vers un point déterminé A. Analytiquement, cela signifie que $X_n(t)$ converge en moyenne vers une fonction de carré sommable $X(t)$.

Bien entendu, cela ne veut pas dire que la série (16) converge pour chaque valeur de t. Elle converge seulement en moyenne. La valeur de $X(t)$ peut d'ailleurs être modifiée arbitrairement pour les points d'un ensemble de mesure nulle. On a vu que, dans ces conditions, $X(t)$ peut être considéré comme parfaitement connu si l'on sait calculer

$$\int_0^1 X(t) y(t)\,dt, \tag{17}$$

$y(t)$ étant une fonction de carré sommable, à cela près quelconque. Cette intégrale est la limite, pour n infini,

$$\int_0^1 X_n(t) y(t)\,dt, \tag{18}$$

puisque

$$\left\{\int_0^1 [X(t) - X_n(t)] y(t)\,dt\right\}^2 \leqq \int_0^1 [X(t) - X_n(t)]^2\,dt \int_0^1 y^2(t)\,dt,$$

quantité qui tend vers zéro. Or, en posant

$$b_n = \int_0^1 f_n(t) y(t)\, dt,$$

l'expression (18) s'écrit

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n.$$

L'expression (17) est donc la somme de la série $\Sigma a_n b_n$, dont on peut vérifier immédiatement qu'elle est convergente, puisque Σa_n^2 et Σb_n^2 le sont. La fonction $X(t)$ peut être considérée comme connue.

La fonction $x(t)$ apparaît alors comme la somme d'une fonction $X(t)$ représentable par la série (16), et d'une fonction $\xi(t)$ orthogonale à toutes les fonctions $f_i(t)$, puisque

$$\int_0^1 f_i(t)\xi(t)\, dt = \int_0^1 f_i(t) x(t)\, dt - \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_i(t) X_n(t)\, dt = a_i - a_i = 0.$$

La fonction $x(t)$ donnée sera alors représentable par la série (15), ou non, suivant que cette fonction $\xi(t)$ est nulle ou non.

96. **Suites complètes et suites incomplètes.** — Nous dirons qu'une suite de fonctions orthogonales est *complète* s'il est impossible de trouver une fonction $g(t)$, non identiquement nulle, identique à toutes les fonctions de la suite. Elle est *incomplète* dans le cas contraire.

Dans le premier cas, la fonction $\xi(t)$ du numéro précédent est sûrement nulle, et par suite une fonction $x(t)$ de carré sommable est toujours représentable par la série (15). On peut dire que le plan P constitue tout l'espace fonctionnel, et les coordonnées a_i constituent un système de coordonnées rectangulaires dans l'espace fonctionnel.

Ce cas est d'ailleurs effectivement possible. La théorie des séries trigonométriques, dont nous avons rappelé les principaux résultats au Chapitre III, montre que la suite

$$1,\quad \sqrt{2}\cos 2\pi t,\quad \sqrt{2}\sin 2\pi t,\quad \ldots,\quad \sqrt{2}\cos 2n\pi t,\quad \sqrt{2}\sin 2n\pi t,\quad \ldots$$

est une suite complète de fonctions orthogonales et normales. Il n'existe aucune fonction orthogonale à toutes ces fonctions, et c'est pour cette raison que toute fonction de carré sommable est représentable par une série trigonométrique.

Le cas des suites incomplètes est évidemment aussi possible. Il suffit de supprimer des termes d'une suite complète pour obtenir une suite incomplète. Dans ce cas, il existe au moins une fonction orthogonale à toutes celles de la suite, et qui n'est évidemment pas représentable par une série de la forme (15). Le plan P, quoique ayant une infinité de dimensions, ne représente qu'une section de l'espace fonctionnel.

On démontre aisément que toute suite incomplète peut être déduite d'une suite complète par suppression de termes en nombre fini ou infini.

Il n'est pas nécessaire que les fonctions d'une suite soient orthogonales pour qu'on puisse se poser la question de savoir si la variété linéaire qu'elles définissent constitue ou non tout l'espace fonctionnel. Ainsi, considérons la suite

$$(19) \qquad 1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots.$$

Par application du procédé indiqué n° 94, on en déduit une suite de polynomes orthogonaux

$$(20) \qquad 1, f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t), \ldots,$$

qui sont bien connus sous le nom de *polynomes de Legendre*. Les n premières fonctions de la suite (20) sont évidemment des combinaisons linéaires et homogènes des fonctions correspondantes de la suite (19), et inversement. Une fonction orthogonale à toutes les fonctions d'une des suites le serait à toutes celles de l'autre; on démontre qu'il n'en existe pas, et par suite la variété linéaire définie par les fonctions (20) constitue tout l'espace fonctionnel.

On voit que, sans passer par l'intermédiaire des suites de fonctions orthogonales, si l'on se donne une suite de fonctions non orthogonales,

$$\varphi_1(t), \quad \varphi_2(t), \quad \ldots, \quad \varphi_n(t), \quad \ldots,$$

comme la suite (19), et si l'on démontre qu'aucune fonction ne peut être orthogonale à la fois à toutes ces fonctions, on peut affirmer que la variété linéaire qu'elles définissent constitue tout l'espace fonctionnel. On peut approcher en moyenne autant que l'on veut de toute fonction de carré sommable par une somme de la forme

$$a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t) + \ldots + a_n\varphi_n(t).$$

Seulement la différence essentielle entre ce cas et le cas des fonctions orthogonales est que, lorsqu'on améliore indéfiniment l'approximation, n augmentant indéfiniment, le coefficient a_i d'indice fixe i ne reste pas fixe. Au contraire, dans le cas des fonctions orthogonales, on peut prendre le coefficient donné par la formule (5), qui dépend de i seulement et non de n.

97. Changements d'axes rectangulaires dans l'espace fonctionnel. — Considérons deux suites

$$(21) \qquad f_1(t),\ f_2(t),\ \ldots,\ f_n(t),\ \ldots,$$
$$(22) \qquad \varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \ldots,\ \varphi_n(t),\ \ldots,$$

de fonctions orthogonales et normales, *la première étant complète*. En posant

$$c_{h,i} = \int_0^1 f_h(t)\varphi_i(t)\,dt,$$

on peut donc écrire

$$(23) \qquad \varphi_i(t) = c_{1,i}f_1(t) + c_{2,i}f_2(t) + \ldots.$$

Le fait que les fonctions $\varphi_i(t)$ soient orthogonales et normales s'exprime par les conditions

$$(24) \qquad \begin{cases} c_{1,i}^2 + c_{2,i}^2 + \ldots = 1, \\ c_{1,i}c_{1,j} + c_{2,i}c_{2,j} + \ldots = 0 \qquad (i \neq j). \end{cases}$$

La résolution des formules (23) par rapport aux fonctions $f_h(t)$ est d'ailleurs possible ou non, suivant que la suite (22) est elle-même complète ou non. Si, en effet, cette suite est complète, on peut intervertir le rôle des suites (21) et (22) et écrire

$$(25) \qquad f_h(t) = c_{h,1}\varphi_1(t) + c_{h,2}\varphi_2(t) + \ldots.$$

Réciproquement, si les $f_h(t)$ s'expriment par des séries de fonctions $\varphi_i(t)$, toute fonction de carré sommable $x(t)$, pouvant être approchée en moyenne autant qu'on veut par une somme de fonctions $f_h(t)$ en nombre fini, peut l'être aussi par une somme de fonctions $\varphi_i(t)$, ce qui prouve que ces fonctions forment une suite complète.

Dans ce cas, le fait que les fonctions $f_h(t)$, données par la formule (25), soient orthogonales et normales, s'exprime par les for-

mules

$$(26)\qquad \begin{cases} c_{h,1}^2 + c_{h,2}^2 + \ldots = 1, \\ c_{h,1}c_{k,1} + c_{h,2}c_{k,2} + \ldots = 0 \qquad (h \neq k). \end{cases}$$

Dans le cas contraire, $f_h(t)$ est la somme de la série (25), et d'une fonction $g_h(t)$ orthogonale à toutes les fonctions $\varphi_i(t)$, et qui, pour au moins une valeur de h, n'est pas identiquement nulle. Si ρ_h est son module fonctionnel, celui de $f_h(t)$ étant 1, on a pour cette valeur de h

$$(27)\qquad c_{h,1}^2 + c_{h,2}^2 + \ldots = 1 - \rho_h^2 < 1.$$

On voit d'ailleurs sans peine que la somme $\Sigma\rho_h^2$ (finie ou infinie) est égale au nombre de fonctions qu'il faudrait ajouter à la suite (22) pour la rendre complète.

Contrairement à ce qui se passe dans le cas d'un tableau fini de n^2 coefficients $c_{i,j}$, le système (26) n'est donc pas une conséquence nécessaire du système (24). S'il est vérifié, et dans ce cas seulement, le système (23) est résoluble, par rapport aux $f_h(t)$, par la formule (25).

Si les deux suites (21) et (22) sont complètes, une fonction $x(t)$ de carré sommable est de la forme

$$x(t) = \sum_1^\infty a_i f_i(t) = \sum_1^\infty \alpha_h \varphi_h(t),$$

les a_i et α_h étant les coordonnées rectangulaires dans deux systèmes différents. On a, pour passer d'un système à l'autre,

$$\alpha_h = \int_0^1 \varphi_h(t) x(t)\, dt,$$

ou, en remplaçant $\varphi_h(t)$ par sa valeur (23),

$$(28)\qquad \alpha_i = c_{1,i}a_1 + c_{2,i}a_2 + \ldots.$$

On a de même

$$(29)\qquad a_h = c_{h,1} + c_{h,2}a_2 + \ldots.$$

Cette dernière formule n'étant vraie que si la suite (22) est complète, on voit que la formule (28) n'est résoluble par rapport aux a_i, les conditions (24) étant supposées vérifiées, que lorsque les éga-

lités (26) sont vraies aussi, et non l'inégalité (27). Il suffit même, d'après ce qui précède, de vérifier la première égalité (26); l'autre en résulte nécessairement, et dans ce cas la résolution cherchée est donnée par la formule (29).

98. **La fonctionnelle considérée comme fonction d'une infinité dénombrable de variables indépendantes.** — D'après ce qui précède, la donnée d'une fonction $x(t)$ de carré sommable dans l'intervalle (0, 1) équivaut à la donnée d'une suite de coefficients $a_1, a_2, \ldots$ tels que la série Σa_n^2 converge. La théorie des séries trigonométriques nous avait déjà conduit à ce résultat; la théorie générale des séries de fonctions orthogonales nous donne une infinité de manières de l'obtenir, chacune définissant un système d'axes rectangulaires dans l'espace fonctionnel.

Une fonctionnelle $U\,|\,[x(t)]\,|$ peut alors être considérée comme une fonction des variables $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

$$U\,|\,[x(t)]\,| = u(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots).$$

La distance de deux points de l'espace fonctionnel étant définie par la formule

$$r^2 = \int_0^1 [y(t) - x(t)]^2\,dt = \Sigma(b_n - a_n)^2$$

où

$$a_n = \int_0^1 f_n(t)x(t)\,dt,$$

$$b_n = \int_0^1 f_n(t)y(t)\,dt,$$

cela revient au même de dire que la fonctionnelle U est continue, ou que la fonction u est continue, les définitions de la continuité étant celles qui résultent de la définition de la distance.

Il est facile d'établir une relation entre les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial a_n}$ et la dérivée fonctionnelle U'_x. On a

$$\delta U = \int_0^1 U'_x\,\delta x\,dt = \Sigma\, u_n\,\delta a_n,$$

u_n désignant le coefficient de $f_n(t)$ dans le développement de U'_x. On

en déduit

$$(30)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial a_n} = u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,U'_x\,dt, \\ U'_x = \displaystyle\sum \frac{\partial u}{\partial a_n} f_n(t). \end{cases}$$

De ces formules résulte immédiatement la relation

$$(31)\qquad \Delta_1 U = \int_0^1 (U'_x)^2\,dt = \sum \left(\frac{\partial u}{\partial a_n}\right)^2.$$

Cette expression $\Delta_1 U$ est *le paramètre différentiel du premier ordre*. En langage géométrique, elle représente le maximum de $(\delta U)^2$ lorsque δx a pour module fonctionnel 1, ou en d'autre terme la valeur de $\left(\frac{dU}{dn}\right)^2$ pour un déplacement normal à la surface de niveau $U = \text{const}$. En la calculant à partir de cette définition, on arrive à l'une ou à l'autre des expressions (31) suivant que l'on définit un point de l'espace fonctionnel par la fonction $x(t)$ ou par ses coordonnées $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$.

99. Du point de vue qui vient d'être exposé, on peut déduire une nouvelle démonstration du théorème de M. Fréchet sur les fonctionnelles linéaires définies dans le champ des fonctions de carrés sommables.

Une telle fonctionnelle est évidemment de la forme

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \ldots + c_n a_n + \ldots,$$

cette série devant être convergente toutes les fois que Σa_n^2 converge. Il en est bien ainsi si $F(n) = c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2$ tend vers une limite pour n infini. Je dis que cette condition est nécessaire ; pour le prouver, nous allons montrer que, si $F(n)$ devient infini, on peut choisir les a_n de manière que Σa_n^2 converge, mais non $\Sigma c_n a_n$.

Si les c_n ne tendent pas vers zéro, on peut choisir une suite de nombres $p_1, p_2, \ldots, p_\nu, \ldots$ tels que les c correspondants soient tous du même signe et supérieurs en valeur absolue à un nombre positif k. Il suffit alors de prendre $a_n = \frac{1}{\nu}$ si n est un des nombres p_ν, et zéro dans le cas contraire.

Si les c_n tendent vers zéro, $F(n)$ et $F(n+1)$ sont équivalents. Prenons alors

$$a_n^2 = \frac{1}{F(n)} - \frac{1}{F(n+1)} = \frac{F(n+1) - F(n)}{F(n)\,F(n+1)}.$$

On en déduit

$$c_n a_n = \frac{F(n+1) - F(n)}{\sqrt{F(n) - F(n+1)}}.$$

Cette différence est équivalente à $\log F(n+1) - \log F(n)$, et $\Sigma c_n a_n$ devient infini.

Il faut donc que Σc_n^2 converge. Aux coefficients c_n correspond alors une fonction $\varphi(t)$ de carré sommable, et la fonctionnelle cherchée s'écrit

$$\int_0^1 \varphi(t)\,x(t)\,dt,$$

ce qui est la formule de M. Fréchet.

CHAPITRE VIII.

TRANSFORMATIONS PONCTUELLES DANS L'ESPACE FONCTIONNEL.

SOMMAIRE : Notions générales. — Notions sur les équations intégrales de première espèce. — Équations à limites fixes de deuxième espèce, ou équations de Fredholm. — Équations à limite supérieure variable, ou de Volterra. — Correspondances linéaires continues. — Correspondances dépendant linéairement d'un paramètre. — Transformations non linéaires. — Remarques sur les surfaces de l'espace fonctionnel et sur les transformations infinitésimales. — Équations intégro-différentielles.

100. Notions générales. — Dans l'espace à n dimensions, une transformation ponctuelle est une relation entre un point A, de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et un point B, de coordonnées $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Les coordonnées de B étant données en fonction de celles de A, c'est un problème fondamental de résoudre les formules par rapport aux coordonnées de A; c'est le problème de l'inversion de la relation donnée. On traite d'abord le cas linéaire; on a à résoudre un système de relations algébriques linéaires; le problème est résolu aisément par l'introduction du déterminant du système. Dans le cas général, la notion fondamentale est celle du déterminant fonctionnel; si ce déterminant n'est pas nul, on peut, au moins dans une certaine région, exprimer les coordonnées de A en fonction de celles de B.

Nous suivrons la même marche dans l'espace fonctionnel. Nous étudierons d'abord le cas linéaire, puis le cas non linéaire. Une difficulté fondamentale provient de ce qu'une variété linéaire à une infinité de dimensions peut représenter tout l'espace fonctionnel ou n'en constituer qu'une section; pourtant, elle aura toujours la même généralité, en ce sens que l'on peut établir une correspondance biunivoque entre les points de deux telles variétés.

Considérons deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$, t variant de 0 à 1, représentées par deux points A et B de l'espace fonctionnel. La correspon-

dance entre ces points est linéaire et résoluble par rapport à B si, pour chaque valeur de t, $y(t)$ est une fonctionnelle linéaire de x. Supposons cette fonctionnelle de la forme de M. Volterra. On a

$$(1) \qquad y(t) = \int_0^1 f(s, t) x(s)\, dt \qquad (0 < t < 1).$$

Le problème qui se pose est de savoir si cette équation peut se résoudre par rapport à $x(s)$. Une telle équation, lorsque la fonction $f(s, t)$ est finie, est ce qu'on appelle *une intégration de première espèce*. La fonction $f(s, t)$ est appelée *noyau* de cette équation.

Elle ne constitue qu'un cas particulier du problème posé, puisque $y(t)$, considéré comme fonctionnelle linéaire de $x(t)$, peut n'être pas de la forme de M. Volterra; ce cas n'est même pas le plus important. Nous ne nous attacherons d'ailleurs pas à étudier le cas général tel qu'il résulte des considérations des n°s 49 et 50, mais nous nous contenterons de donner quelques indications sur les cas les plus importants. Pour plus de détails, on consultera avec profit le *Cours d'Analyse* de M. Goursat, ou les Ouvrages sur les équations intégrales de M. Lalesco et de M. Volterra.

101. Notions sur les équations intégrales de première espèce. — Voyons d'abord ce que donne, appliquée à l'équation (1), la méthode du passage du fini à l'infini. Posons

$$s_i = \frac{i}{p}, \quad x_i = x(s_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

$$t_j = \frac{j}{p}, \quad y_j = y(t_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, q).$$

On peut considérer l'équation (1) comme limite du système

$$(2) \qquad y_j = c_{1,j} x_1 + c_{2,j} x_2 + \ldots + c_{p,j} x$$

$$\left[c_{i,j} = \frac{1}{p} f(s_i, t_j); \quad (j = 1, 2, \ldots, q\right],$$

p et q devenant infinis. Mais ce point de vue ne conduit à aucun résultat précis. Si $p = q$, la solution du système est, en général, bien déterminée. Si $p < q$, il y a en général impossibilité. Si $p > q$, il y a en général indétermination. Les trois cas pouvant aussi bien conduire à la limite à la même équation (1), et les conclusions qu'on peut s'at-

tendre à tirer du passage à la limite étant contradictoires, on voit qu'on ne peut pas s'attendre à ce que l'étude du système (2) conduise, dans le cas général, à une théorie de l'équation (1).

Il n'y a, d'ailleurs, aucune raison de considérer comme plus naturel de prendre $p = q$. Cela conduirait à l'idée que l'équation (1), dans le cas général, détermine bien $x(s)$. Or, s'il en était ainsi, en ne considérant que les valeurs de t comprises entre 0 et $\frac{1}{2}$, on aurait indétermination, et, en posant $\tau = 2t$ et $y(t) = \eta(\tau)$, on aurait

$$\eta(\tau) = \int_0^1 f\left(s, \frac{\tau}{2}\right) x(s)\, ds,$$

équation du type (1), τ et s variant de 0 à 1, et dont la solution serait indéterminée. On voit bien qu'il n'y a aucune conséquence à tirer du fait que les intervalles de variation de s et t soient égaux, cette circonstance pouvant toujours être réalisée par un changement d'unité sur l'une des variables s et t.

102. L'introduction de la notion de fonctions orthogonales va nous donner des résultats plus précis. Supposons $f(s, t)$ de la forme

$$(3) \qquad f(s, t) = c_1\varphi_1(s)\psi_1(t) + c_2\varphi_2(s)\psi_2(t) + \ldots + c_n\varphi_n(s)\psi_n(t) + \ldots,$$

chacune des suites

$$(4) \qquad \varphi_1(s), \quad \varphi_2(s), \quad \ldots, \quad \varphi_n(s), \quad \ldots,$$
$$(5) \qquad \psi_1(t), \quad \psi_2(t), \quad \ldots, \quad \psi_n(t), \quad \ldots,$$

étant composée de fonctions orthogonales et normales [1]. Remarquons que la série Σc_n^2 est nécessairement convergente, si $f(s, t)$ est de carré sommable, car

$$\int_0^1 \int_0^1 f^2(s, t)\, ds\, dt = c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2 + \ldots.$$

---

[1] Une fonction $f(s, t)$, de carré sommable dans le carré $0 < s < 1$, $0 < t < 1$, peut d'ailleurs être représentée par une série de la forme (3), convergente en moyenne. Ce résultat se déduit de l'étude des équations intégrales de deuxième espèce *Voir* sur ce sujet les Ouvrages cités n° 101 ou le remarquable Mémoire de M. E. Schmidt (*Mathematische Annalen*, t. LXII et LXIII). Nous reviendrons sur cette question au Chapitre IV de la troisième Partie, dans le cas où la fonction $f(s, t)$ est symétrique.

En posant

$$(6) \qquad a_i = \int_0^1 \varphi_i(s) x(s)\, ds,$$

l'équation (1) s'écrit

$$(7) \qquad y(t) = c_1 \alpha_1 \psi_1(t) + c_2 \alpha_2 \psi_2(t) + \ldots + c_n \alpha_n \psi_n(t) + \ldots.$$

Si les suites (4) et (5) sont complètes, on peut développer $y(t)$ en série de fonctions $\psi(t)$. En désignant par β_n le coefficient de $\psi_n(t)$, il vient $\beta_n = c_n \alpha_n$. La série $\Sigma \beta_n^2$ est sûrement convergente, mais c_n tend vers zéro et l'on ne peut affirmer que $\Sigma \alpha_n^2$ converge. La convergence de cette série est alors nécessaire et suffisante pour l'existence d'une fonction de carré sommable $x(s)$, correspondant par la formule (6) aux coefficients $\alpha_i = \frac{\beta_i}{c_i}$ (*condition de M. E. Picard*). Cette fonction est alors bien déterminée.

Ainsi, dans le cas où les suites (4) et (5) sont complètes, l'équation (1) établit une correspondance biunivoque entre l'espace fonctionnel tout entier, décrit par $x(s)$, et une partie de cet espace, décrite par $y(t)$. (Nous considérons ici l'espace fonctionnel représentant l'ensemble des fonctions de carrés sommables.) La partie décrite par $y(t)$ est définie par des conditions de continuité.

Pour se rendre compte de la nature de cette condition, plaçons-nous dans le cas particulier où $f(s, t) = 0$, si $s < t$ et 1 si $s > t$. L'équation (1) s'écrit alors

$$y(t) = \int_0^1 x(s)\, ds.$$

Le champ fonctionnel décrit par $y(t)$ est celui des fonctions s'annulant pour $t = 0$ et admettant une dérivée de carré sommable; cette dérivée est $x(s)$. Dans ce champ, la définition naturelle de la distance de deux fonctions $y(t)$ et $Y(t)$ est donnée par la formule

$$\rho^2 = \int_0^1 [Y'(t) - y'(t)]^2\, dt.$$

Avec cette définition, et la définition habituelle dans le champ des $x(s)$, la correspondance entre les deux fonctions est continue; le point représentant l'une des fonctions tendant vers une limite, celui représentant l'autre tend aussi vers une limite. Avec la définition

habituelle de la distance dans le champ des $y(t)$, $x(s)$ ne dépendrait évidemment pas de $y(t)$ d'une manière continue.

Appliquons maintenant la méthode générale. La fonction $f(s, t)$ considérée s'écrit

$$f(s, t) = \sum \frac{4}{2n+1} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi s \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi t.$$

La relation entre les développements correspondants de $x(s)$ et $y(t)$ est alors

$$x(s) = \sum \alpha_n \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi s,$$

$$y(t) = \sum \frac{\alpha_n}{n + \frac{1}{2}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi t = \sum \beta_n \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi t$$

(comme il est bien évident, puisque y est la primitive de x), et la condition de M. Picard est que la série $\Sigma\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \beta_n^2$, ou plus simplement la série $\Sigma n^2 \beta_n^2$, soit convergente. Cette condition est équivalente à celle que $y(t)$ soit une fonction s'annulant à l'origine et ayant une dérivée de carré sommable.

103. Des circonstances toutes différentes se présentent si les suites (4) et (5) ne sont pas complètes toutes les deux.

Supposons d'abord que la suite (4) soit complète, mais non la suite (5). Des conditions sont alors nécessaires pour que $y(t)$ soit représentable par une série de fonctions $\psi(t)$. Si $y(t)$ vérifie ces conditions, on peut continuer comme dans le cas précédent. On voit donc que le problème est, en général, impossible, jamais indéterminé.

Supposons maintenant la suite (5) complète, mais non la suite (4). Si la condition de M. Picard est vérifiée, on peut trouver une infinité de fonctions $x(s)$ vérifiant les relations (6); elles sont représentées par la formule

$$x(s) = \Sigma \alpha_n \varphi_n(s) + \xi(s) = X(s) + \xi(s),$$

$\xi(s)$ étant une fonction orthogonale à toutes les fonctions $\varphi_n(s)$.

Si, enfin, aucune des suites (4) et (5) n'est complète, on trouve : d'une part, des conditions de possibilité imposées à $y(t)$; d'autre part, indétermination pour $y(s)$. Il n'y a aucune relation entre le

nombre de conditions imposées à $y(t)$ et le nombre de paramètres dont dépend $y(s)$, le premier de ces nombres dépendant de la suite (5) et le second de la suite (4).

On obtient ainsi des circonstances toutes différentes de celles rencontrées dans l'étude des correspondances linéaires dans l'espace à n dimensions. La circonstance essentielle de cette étude est que, si le déterminant des coefficients est nul, ainsi que ses mineurs, jusqu'à l'ordre $p-1$, les y doivent vérifier p conditions de possibilité, et les x dépendent *du même nombre* p de paramètres; d'ailleurs, en général, le déterminant n'est pas nul, et le problème est toujours possible et déterminé.

Ces circonstances ne s'étendent pas à l'espace fonctionnel. Il y a correspondance biunivoque entre les fonctions

$$X(s) = \Sigma \alpha_n \varphi_n(s)$$

et les fonctions

$$y(t) = \Sigma c_n \alpha_n \psi_n(t).$$

telles que Σa_n^2 converge, mais non entre des fonctions quelconques de carrés sommables.

104. Nous allons maintenant étudier des cas dans lesquels la théorie ordinaire des équations linéaires se généralise, et dans lesquels, s'il y a p conditions de possibilité, la solution dépend de p paramètres arbitraires.

Un premier cas est celui où la fonction $f(s, t)$ est symétrique. On peut montrer, dans ce cas, que les deux suites (4) et (5) sont identiques. Elles sont alors complètes en même temps ou incomplètes en même temps, et, dans ce dernier cas, il faut ajouter le même nombre p de fonctions pour les compléter (ce nombre étant fini ou infini). Ce cas vérifie donc bien la condition énoncée, à cela près qu'il faut tenir compte de la condition de M. Picard.

Deux autres cas sont ceux des équations intégrales de deuxième espèce et des équations à limites variables. Ils vont nous donner des exemples de correspondances bien définies dans le champ de toutes les fonctions de carrés sommables, l'équivalent de la condition de M. Picard n'existant plus. Nous verrons ensuite un cas plus général.

105. Équations à limites fixes de deuxième espèce, ou équations

de Fredholm. — On appelle ainsi l'équation intégrale linéaire

$$(8) \qquad y(t) = x(t) + \lambda \int_0^1 f(s, t) x(s)\, ds \qquad (0 < t < 1) \quad [1].$$

Les équations de ce type se présentent fréquemment dans les applications. Si t est un paramètre fixant la position d'un point sur un contour, et si x et y sont des grandeurs physiques définies en chaque point, il arrivera souvent que la valeur de $y(t)$ en un point soit une fonctionnelle linéaire de x qui dépende spécialement de sa valeur $x(t)$ au même point. On a alors une équation du type (8).

Dans ce cas, la solidarité qui existe entre les valeurs de x et y en un même point permet de déduire des conséquences du fait que ces deux fonctions sont définies dans le même intervalle. On peut espérer obtenir des résultats généralisant mieux la théorie des équations algébriques linéaires que ceux relatifs à l'équation (1). Nous allons y arriver par la méthode de passage du fini à l'infini.

Posons

$$s_i = \frac{i}{n}, \qquad x_i = x(s_i),$$

$$t_j = \frac{j}{n}, \qquad y_j = y\left(\frac{j}{n}\right),$$

$$c_{i,j} = \frac{1}{n} f(s_i, t_j) \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

L'équation (8) apparaît comme la limite du système

$$(9) \qquad \begin{cases} y_1 = (1 + \lambda c_{1,1}) x_1 + \lambda c_{2,1} x_2 + \ldots + \lambda c_{n,1} x_n, \\ y_2 = \lambda c_{1,2} x_1 + (1 + \lambda c_{2,2}) x_2 + \ldots + \lambda c_{n,2} x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n = \lambda c_{1,n} x_1 + \lambda c_{2,n} x_2 + \ldots + (1 + \lambda c_{n,n}) x_n. \end{cases}$$

Ce système diffère du système (2) par l'addition du terme 1 dans les coefficients de la diagonale principale. Cela change son aspect, et l'on peut obtenir, en le résolvant, des formules sur lesquelles le passage à la limite s'effectue sans difficulté. Indiquons seulement

---

[1] La présence du facteur λ n'augmente en rien la généralité, puisqu'on peut remplacer $\lambda f(s, t)$ par $f(s, t)$; elle facilite l'exposé de la théorie.

comment se présente le calcul pour le dénominateur

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+\lambda c_{1,1} & \lambda c_{2,1} & \dots & \lambda c_{n,1} \\ \lambda c_{1,2} & 1+\lambda c_{2,2} & \dots & \lambda c_{n,2} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \lambda c_{1,n} & \lambda c_{2,n} & \dots & 1+\lambda c_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Développons-le en série suivant les puissances croissantes de λ. Le terme constant est 1. Les coefficients de λ et λ^2 sont respectivement

$$\sum_i c_{i,i} = \sum_i \frac{f\left(\frac{i}{n}, \frac{i}{n}\right)}{n},$$

$$\sum_{i,j} \begin{vmatrix} c_{i,i} & c_{j,i} \\ c_{i,j} & c_{j,i} \end{vmatrix} = \sum_{i,j} \frac{1}{n^2} \begin{vmatrix} f\left(\frac{i}{n}, \frac{i}{n}\right) & f\left(\frac{j}{n}, \frac{i}{n}\right) \\ f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) & f\left(\frac{j}{n}, \frac{j}{n}\right) \end{vmatrix},$$

et tendent vers

$$\int_0^1 f(t, t)\, dt, \quad \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \begin{vmatrix} f(t_1, t_1) & f(t_2, t_1) \\ f(t_1, t_2) & f(t_2, t_2) \end{vmatrix} dt_1\, dt_2$$

(ie facteur $\frac{1}{2}$ provenant de ce que les deux termes obtenus en permutant i et j, qui ne doivent être comptés que pour un, sont comptés deux fois dans le développement de l'intégrale double ; ce dernier développement introduit aussi des termes pour lesquels $i = j$, mais il n'en résulte aucune difficulté, leur somme tendant vers zéro).

D'une manière générale, les termes successifs du développement de Δ_n suivant les puissances croissantes de λ tendent vers les termes correspondants de l'expression

$$\Delta = 1 + \lambda \int_0^1 f(t_1, t_1)\, dt_1 + \frac{\lambda^2}{2}\int_0^1\int_0^1 \begin{vmatrix} f(t_1, t_1) & f(t_2, t_1) \\ f(t_1, t_2) & f(t_2, t_2) \end{vmatrix} dt_1\, dt_2 + \dots$$

$$+ \frac{\lambda^p}{p!}\int_0^1\int_0^1 \dots \int_0^1 \begin{vmatrix} f(t_1, t_1) & \dots & f(t_p, t_1) \\ f(t_1, t_2) & \dots & f(t_p, t_2) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ f(t_1, t_p) & \dots & f(t_p, t_p) \end{vmatrix} \times dt_1\, dt_2 \dots dt_p + \dots,$$

expression qu'on appelle *déterminant* de l'équation (8).

Le numérateur de l'expression qui donne x_i se déduit de Δ_n en remplaçant par $y_1, y_2, \dots, y_n$ les éléments de la diagonale de rang i.

Les coefficients, qui sont des mineurs de Δ_n, sont infiniment petits avec $\frac{1}{n}$, à l'exception du coefficient de y_i, mineur correspondant à un élément de la diagonale principale; c'est un déterminant analogue à Δ_n, et qui a même limite. On a donc des expressions de la forme

$$x_i = \frac{\Delta_n y_i + C_{i,1} y_1 + C_{i,2} y_2 + \ldots + C_{i,n} y_n}{\Delta_n},$$

les coefficients $C_{i,j}$ étant des infiniment petits, de l'ordre de $\frac{1}{n}$. A la limite, on est conduit à une expression de la forme

$$x(s) = y(s) + \lambda \int_0^1 F(s, t) y(t)\, dt, \tag{10}$$

$F(s, t)$ désignant une fraction, dont le dénominateur est Δ, et dont le numérateur est une série analogue à celle qui donne Δ.

Ainsi, nous sommes conduits à une expression de $x(s)$ en fonction de y tout à fait analogue à celle qui donne $y(t)$ en fonction de x. Le *noyau* $f(s, t)$ est seulement remplacé par la fonction $F(s, t)$, qu'on appelle *noyau résolvant*.

Bien entendu, la méthode que nous venons d'indiquer n'est qu'une méthode d'induction, dont on pourrait difficilement tirer la démonstration rigoureuse de l'équivalence des formules (8) et (10). M. Fredholm, à qui est due la théorie de l'équation (8), a vérifié directement l'exactitude de la solution donnée par la formule (8). Contentons-nous d'énoncer ses principaux résultats :

1° Le noyau $f(s, t)$ étant supposé fini, la série Δ, et la série analogue qui représente le numérateur de $F(s, t)$, sont toujours convergentes. Ce sont des fonctions entières en λ.

2° Si le déterminant Δ n'est pas nul, la solution de l'équation (8) est unique, et donnée par la formule (10).

3° Si Δ, qui ne peut être identiquement nul, puisque $\Delta = 1$ pour $\lambda = 1$, a une racine d'ordre h pour la valeur considérée de λ, la fonction $y(t)$ doit vérifier h conditions de la forme

$$\int_0^1 \varphi_i(t) y(t)\, dt = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, h).$$

Si ces conditions sont vérifiées, l'équation (8) admet des solutions dépendant linéairement de h constantes arbitraires.

Les circonstances que l'on peut rencontrer dans l'étude de l'équation de Fredholm sont donc exactement les mêmes que l'on rencontre dans l'étude des systèmes d'équations algébriques linéaires.

Pour les équations d'un type plus général, sans avoir formé explicitement dans tous les cas l'expression qui généralise le déterminant, nous dirons qu'une relation linéaire, donnant $y(t)$ en fonction de $x(s)$, admet un déterminant, et que celui-ci n'est pas nul, lorsque la résolution par rapport à x est toujours possible et déterminée dans le champ des fonctions de carrés sommables.

106. Équations à limite supérieure variable, ou de Volterra. — Elles peuvent être de première ou de deuxième espèce. On a ainsi les deux types d'équations

$$y(t) = \int_0^t f(s, t) x(s)\, ds, \tag{11}$$

$$y(t) = x(t) + \lambda \int_0^t f(s, t) x(s)\, ds. \tag{12}$$

Si t varie de 0 à une valeur T, on peut se proposer de déterminer la fonction x dans le même intervalle (0, T).

Ces équations peuvent être considérées comme des cas particuliers des équations à limites fixes. Il suffit de prendre le noyau égal à $f(s, t)$ pour $s < t$ et nul pour $s > t$. La discontinuité pour $s = t$, bien loin de rendre la résolution plus difficile, la facilite. Même dans le cas de l'équation de première espèce, il en résulte une solidarité entre les valeurs de x et y pour les mêmes valeurs de la variable, et cela est, comme nous le savons, de nature à faciliter l'intégration. On a, en effet, en dérivant l'équation (11),

$$y'(t) = f(t, t) x(t) + \int_0^t f'_t(s, t) x(s)\, ds. \tag{13}$$

Si $f(0, 0)$ n'est pas nul, et T assez petit pour que $f(t, t)$ ne s'annule pas dans l'intervalle considéré, on peut prendre comme fonction inconnue $f(t, t)\, x(t)$, et l'on est ramené à une équation de deuxième espèce, plus facile à intégrer. D'ailleurs $y(0) = 0$ est une condition évidemment nécessaire pour que l'équation (11) admette une solution, et, dans cette hypothèse, les équations (11) et (13) sont équiva-

lentes. Il suffit donc d'étudier l'équation de deuxième espèce, que nous prendrons sous la forme (12).

Les formules générales de M. Fredholm sont évidemment applicables. Mais la solution du problème actuel est beaucoup plus simple, et a d'ailleurs été obtenue par M. Volterra bien avant les travaux de M. Fredholm.

Formons la solution par la méthode des approximations successives, l'approximation $x_{n+1}(t)$ étant déduite de la précédente par la formule

$$y(t) = x_{n+1}(t) + \lambda \int_0^t f(s, t) x_n(s)\, ds,$$

d'où l'on tire,

$$x_{n+1}(t) - x_n(t) + \lambda \int_0^t f(s, t)\,[x_n(s) - x_{n-1}(s)]\, ds = 0.$$

Si les fonctions $f(s, t)$ et $x_1(s) - x_0(s)$ sont finies, et respectivement inférieures en module à des nombres K et $\mathfrak{M}$, on en déduit

$$(14) \qquad |x_{n+1}(t) - x_n(t)| < \frac{\mathfrak{M}\, K^n \lambda^n t^n}{n!},$$

inégalité qui se vérifie immédiatement par récurrence. Il en résulte, en vertu des principes bien connus de la méthode des approximations successives, que $x_n(t)$ tend uniformément, pour $|t| < T$, vers une limite $x(t)$, solution de l'équation (12), et qu'il n'y a pas d'autre solution.

Si les fonctions $y(t)$ et $f(s, t)$ ne sont pas finies, mais de carrés sommables, on peut prendre pour $x_0(t)$ une fonction de carré sommable quelconque, et le module fonctionnel de $x_{n+1} - x_n$ (et non son module maximum) vérifie l'inégalité (14). On en déduit la convergence en moyenne de $x_n(t)$ vers une fonction de carré sommable, solution de l'équation (12).

En prenant $x_0(t) = y(t)$, on obtient $x(t)$ sous la forme d'une série entière en λ.

Ces résultats apparaissent bien comme un cas particulier de ceux relatifs à l'équation de Fredholm; dans ce cas le déterminant Δ n'est jamais nul; alors la solution est toujours unique et déterminée, et est une fonction entière de λ.

107. M. Lalesco a montré l'existence d'un lien étroit entre l'équa-

tion de Volterra et les équations différentielles linéaires. Soit à trouver la solution de l'équation

$$(15)\qquad \frac{d^n u}{dt^n} + f_1(t)\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} + \ldots + f_{n-1}(t)\frac{du}{dt} + f_n(t)u = y(t),$$

s'annulant pour $t = 0$ ainsi que ses $n-1$ premières dérivées. On peut la former par approximations successives, en prenant comme inconnue auxiliaire $\frac{d^n u}{dt^n} = x(t)$. On en tire

$$\frac{d^{n-i}u}{dt^{n-i}} = \int_0^t \frac{(t-s)^{i-1}}{(i-1)!}x(s)\,ds \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et l'équation (15) s'écrit

$$y(t) = x(t) + \int_0^t f(s, t)x(s)\,ds,$$

avec

$$f(s, t) = f_1(t) + f_2(t)(t-s) + \ldots + f_n(t)\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

On est donc ramené à une équation de Volterra, dont le noyau, considéré comme fonction de s, est un polynome. La méthode des approximations successives conduit sans difficulté à la solution.

Le fait que $f(s, t)$ soit un polynome en s n'apportant aucune simplification dans la méthode, l'application à l'équation (15) de la méthode des approximations successives devait nécessairement conduire à considérer l'équation de Volterra sous sa forme générale.

108. Correspondances linéaires continues. — Soit un point A représentant une fonction de carré sommable $x(t)$, et restant à l'intérieur de la sphère

$$(16)\qquad \int_0^1 x^2(t)\,dt = 1 \qquad [\text{ou } \|x(t)\| = 1].$$

Si un point B représentant une fonction de carré sommable dépend linéairement de A, il décrit une région (volume ou hypersurface) que nous pouvons appeler *ellipsoïde*. On peut se demander si la distance de B au centre de l'ellipsoïde est limitée supérieurement. La réponse est affirmative.

En effet, dans l'hypothèse contraire, on pourrait trouver une suite

de fonctions

$$x_1(t), \quad x_2(t), \quad \ldots, \quad x_n(t), \quad \ldots,$$

auxquelles correspondent, dans la correspondance étudiée, des fonctions

$$\lambda_1 \eta_1(t), \quad \lambda_2 \eta_2(t), \quad \ldots, \quad \lambda_n \eta_n(t), \quad \ldots,$$

les fonctions $\eta_n(t)$ étant situées sur la sphère (16), et les λ_n augmentant indéfiniment. Choisissons une suite de coefficients a_n tels que $\Sigma a_n^2 = 1$ et que $\Sigma \lambda_n^2 a_n^2$ augmente indéfiniment. A la fonction

$$x(t) = \varepsilon_1 a_1 x_1(t) + \varepsilon_2 a_2 x_2(t) + \ldots + \varepsilon_n a_n x_n(t) + \ldots,$$

les ε étant tous égaux à ± 1, correspond la fonction

$$y(t) = \varepsilon_1 \lambda_1 a_1 \eta_1(t) + \varepsilon_2 \lambda_2 a_2 \eta_2(t) + \ldots + \varepsilon_n \lambda_n a_n \eta_n(t) + \ldots.$$

Désignons par $y_n(t)$ la somme des n premiers termes de $y(t)$, et choisissons ε_n de manière que

$$\varepsilon_n \lambda_n a_n \int_0^1 y_{n-1}(t) \eta_n(t)\, dt \geq 0.$$

On a évidemment

$$\int_0^1 y_n^2(t)\, dt \geq \int_0^1 y_{n-1}^2(t)\, dt + \lambda_n^2 a_n^2 \geq \lambda_1^2 a_1^2 + \lambda_2^2 a_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 a_n^2.$$

Cette expression augmentant indéfiniment avec n, la fonction $y(t)$ ne serait pas de carré sommable. Le théorème est donc démontré.

Il en résulte que, si A reste dans une région finie, B reste dans une région finie, ou encore, ce qui revient au même (*voir* n° 39), que B dépend de A d'une manière continue.

Si la correspondance entre A et B est résoluble par rapport à B, le rapport $\frac{BB'}{AA'}$ (B' étant le point qui correspond à A') a non seulement un maximum, mais un minimum. En d'autres termes, l'ellipsoïde correspondant à la sphère (16) a ses demi-diamètres compris entre une limite inférieure positive et une limite supérieure finie.

109. Correspondances dépendant linéairement d'un paramètre. — Posons

$$y(t) = x(t) + \lambda z(t), \tag{17}$$

$z(t)$ dépendant linéairement de $x(t)$ de la manière considérée au numéro précédent, la limite supérieure de $\|z(t)\|$ sur la sphère (16) étant désignée par K. Je dis que, pour $|\lambda| < \frac{1}{K}$, la relation (17) est résoluble par rapport à $x(t)$.

Nous allons former la solution par des approximations successives. Prenons comme relation de récurrence

$$y(t) = x_{n+1}(t) + \lambda z_n(t), \tag{18}$$

$z_n(t)$ désignant ce que devient $z(t)$ pour la détermination x_n de x. On en déduit

$$x_{n+1}(t) - x_n(t) + \lambda[z_n(t) - z_{n-1}(t)] = 0,$$
$$\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \leqq K|\lambda| \, \|x_n(t) - x_{n-1}(t)\| \leqq \mathfrak{M} K^n |\lambda|^n,$$

$\mathfrak{M}$ étant indépendant de n. Donc, si $K|\lambda| < 1$, $x_n(t)$ converge en moyenne vers une fonction $x(t)$ de carré sommable, et la formule (18) montre à la limite que cette fonction vérifie l'équation (17). D'ailleurs, si $X(t)$ est une solution de cette équation, on a, par une méthode analogue,

$$\|X(t) - x(t)\| \leqq K|\lambda| \, \|X(t) - x(t)\|,$$

ce qui prouve que $X(t)$ et $x(t)$ sont identiques. La solution trouvée est donc unique.

On voit ainsi que, pour $|\lambda| < \frac{1}{K}$, la solution (17) définit une correspondance biunivoque et continue entre les deux fonctions de carrés sommables x et y. A une fonction $x(t)$ de module fonctionnel égal à 1, correspond une fonction $y(t)$ de module fonctionnel compris évidemment entre $1 - |\lambda|K$ et $1 + |\lambda|K$.

110. Transformations non linéaires. — Il est facile d'étendre le raisonnement précédent à des équations non linéaires. Partons de l'équation linéaire

$$y(t) = F|[x(s)|t]|, \tag{19}$$

F étant une fonctionnelle linéaire de x, et supposons que cette équation admette un déterminant non nul, de sorte que le rapport $\frac{\|y\|}{\|x\|}$ des modules fonctionnels ait une limite inférieure positive m.

Considérons l'équation non linéaire

$$y(t) = F[x(s)|t]| + G|[x(s)|t]|, \tag{20}$$

déduite de la précédente par addition d'une fonctionnelle G nulle pour $x = 0$ et telle que la différence

$$G|[X(s)|t]| - G|[x(s)|t]|$$

ait son module fonctionnel inférieur à $K\|X(s) - x(s)\|$, tant que les fonctions $x(s)$ et $X(s)$ sont situées à l'intérieur d'une sphère de centre R ayant l'origine pour centre.

Cherchons à former par approximations successives la solution $x(s)$ de l'équation (20). Prenons comme première approximation la solution $x_0(s)$ de l'équation (19), et formons les approximations successives par la formule

$$y(t) = F|[x_{i+1}(s)|t]| + G|[x_i(s)|t]|,$$

d'où l'on déduit

$$F|[x_1(s) - x_0(s)|t]| + G|[x_0(s)|t]| = 0,$$
$$F|[x_{i+1}(s) - x_i(s)|t]| = G|[x_{i-1}(s)|t]| - G|[x_i(s)|t]| \qquad (i > 0).$$

Ces formules définissent sans ambiguïté toutes les fonctions x_i, et l'on a, pourvu qu'elles restent à l'intérieur de la sphère de rayon R,

$$\|x_1 - x_0| < K\|x_0| \leqq \frac{K}{m}\|y(t)\|,$$

$$\|x_{i+1} - x_i\| < \frac{K}{m}\|x_i - x_{i-1}\| < \left(\frac{K}{m}\right)^{i+1}\|y(t)\|.$$

De cette formule résulte la convergence des approximations vers une solution de l'équation (20), pourvu que $K < m$, et il n'y a évidemment pas d'autres solutions dans le voisinage de l'origine.

Ce raisonnement suppose que l'on ne sorte à aucun moment de la sphère de rayon R. Il suffit pour cela que

$$\frac{K}{m}\|y(t)\|\left(1 + \frac{K}{m} + \ldots\right) = \frac{K}{m - K}\|y(t)\| \leqq R,$$

c'est-à-dire que $y(t)$ ait son module fonctionnel au plus égal à $\frac{R(m - K)}{K}$.

On voit donc qu'il y aura correspondance biunivoque entre les

points A et B représentant les deux fonctions x et y, tant que ceux-ci restent dans des régions suffisamment petites, mais finies, entourant l'origine.

On peut appliquer ce résultat à une relation de forme presque quelconque, si l'on connaît un système de points A_0 et B_0 qui se correspondent; x_0 et y_0 désignant les fonctions représentées par ces points, mettons cette relation sous la forme

$$(21) \qquad y(t) - y_0(t) = F\,|\,[x - x_0\,|\,t]\,| + G\,|\,[x - x_0\,|\,t]\,|,$$

F désignant dans le second membre la partie du premier ordre par rapport à $x - x_0$ (c'est-à-dire que $F\,|\,[\delta x\,|\,t]\,|$ est la variation du second membre au point A_0).

Si l'équation linéaire

$$y(t) - y_0(t) = F\,|\,[x - x_0\,|\,t]\,|$$

n'a pas un déterminant différent de zéro, on ne peut évidemment pas s'attendre à ce que la correspondance définie par l'équation (21) soit résoluble par rapport à la fonction x. Si, au contraire, elle a un déterminant différent de zéro, la fonctionnelle G vérifiera presque toujours dans le voisinage de A_0 la condition indiquée plus haut; si sa variation première est continue à la Lipschitz elle la vérifiera, dans une certaine sphère de centre A_0, non seulement pour une valeur convenable de K inférieure à m, mais pour K aussi petit que l'on veut. On a alors une correspondance biunivoque entre les points A et B dans des petites régions entourant respectivement A_0 et B_0.

111. Si l'on sort du point de vue local, il y a de plus grandes difficultés. Une des questions les plus importantes est de chercher combien une équation, de forme absolument quelconque par rapport à $x(t)$, admet de solutions dans un volume donné. La question analogue, dans le cas de l'espace ordinaire, et résolue par la notion de l'indice de Kronecker, qui s'exprime par une intégrale de surface. On ne peut songer à aborder sa généralisation avant d'avoir étudié l'intégration dans le domaine fonctionnel, ce que nous ferons dans la troisième Partie; mais, même après cette étude, le problème considéré semble encore très difficile (*voir* troisième Partie, n° **148**, 8°).

112. Remarques sur les surfaces de l'espace fonctionnel et sur les transformations infinitésimales. — Dans l'espace à n dimensions, les surfaces continues à $n-1$ dimensions jouissent de la propriété de constituer une séparation entre deux régions, telle qu'on ne peut pas passer de l'une à l'autre sans traverser la surface.

Dans l'espace fonctionnel, il existe également des surfaces jouissant de cette propriété. Telle est par exemple la sphère $\|x\| = R$. En restant dans le champ des fonctions de carrés sommables, on ne peut passer par un mouvement continu d'une fonction de module fonctionnel inférieur à R à une fonction de module supérieur à R sans qu'une fonction intermédiaire soit exactement sur la sphère considérée.

A l'inverse de ce qui se passe dans l'espace à n dimensions, ces surfaces S, qui jouissent de la propriété d'être la frontière d'un volume, ne peuvent pas être caractérisées par leur nombre de dimensions. Nous savons qu'on peut, par exemple, établir une correspondance biunivoque entre l'espace fonctionnel et une de ses sections planes P; la surface S correspondra alors à une variété du plan P, qui limitera une région de ce plan, mais non une région de l'espace; si elle divise le plan P en deux parties P_1 et P_2, on pourra, en sortant du plan P, passer de l'une à l'autre sans traverser la variété V. On voit donc que la propriété de constituer la frontière d'un volume, qui dans l'espace ordinaire se conserve en général par des transformations ponctuelles, se perd au contraire en général. C'est une des conséquences de cette circonstance que le nombre ω des dimensions de l'espace fonctionnel étant infini, rien ne distingue les uns des autres les nombres ω, $\omega - 1$, $\omega - 2$, ... La géométrie (et en particulier l'*analysis situs*) est la même dans l'espace et dans les sections vérifiant un nombre fini de conditions linéaires.

Mais ces circonstances ne peuvent pas se produire pour une transformation infinitésimale

$$y(t) = x(t) + G\,|\,[x\,|\,t, \lambda]\,|,$$

la fonctionnelle G étant infiniment petite avec λ. Si λ est suffisamment petit, cette relation est du type étudié n° 110 et il y a correspondance biunivoque entre $x(t)$ et $y(t)$. A un volume décrit par le point représentant $x(t)$ correspond un volume très peu différent décrit par le point représentant $y(t)$. Par suite, à une surface, fron-

tière d'un volume, correspond une surface infiniment peu différente, qui est également la frontière d'un volume. A une surface définie par p conditions d'égalité correspond de même une surface infiniment voisine définie par p conditions d'égalité.

La déformation de la surface est d'ailleurs bien définie (indépendamment de la loi de correspondance entre les points de la surface initiale et ceux de la surface déformée), si l'on se donne les p composantes normales du déplacement de chaque point. Ainsi la déformation d'une surface frontière de volume, dépendant d'un paramètre λ, est bien définie par la donnée en chaque point du déplacement normal $\delta n = U\,d\lambda$. Si la fonctionnelle U dépend, d'une manière continue, du point de la surface, la surface déformée est encore une surface définie par une seule condition d'égalité, quand λ est assez voisin de la valeur initiale; mais il peut arriver, naturellement, que ce caractère disparaisse quand λ tend vers une certaine limite λ_1.

113. Équations intégro-différentielles. — Considérons un groupe de transformations, obtenu par répétition d'une transformation infinitésimale. Chaque point décrit une ligne, qu'on peut obtenir par intégration de l'équation

$$\delta x(t) = F\,|\,[x\,|\,t]\,|\,d\lambda. \tag{22}$$

On peut dire aussi que la fonctionnelle F définit un vecteur en chaque point, et la ligne en question est une ligne de force de ce champ de vecteur.

Si la fonctionnelle F est linéaire et de la forme normale de M. Volterra, l'équation (22) s'écrit

$$\delta x(t) = d\lambda \int_0^1 f(s)\,x(s)\,ds,$$

ou encore, x étant une fonction de t et λ,

$$\frac{\partial x(t,\lambda)}{\partial \lambda} = \int_0^1 f(s,\lambda)\,x(s,\lambda)\,ds.$$

Dans des cas plus généraux, la fonctionnelle F pouvant être représentée par une série de Taylor, on aura au second membre une

série d'intégrales de divers ordres et contenant x à divers degrés. L'équation aura alors le caractère d'une équation différentielle par rapport à la variable λ, et d'une équation intégrale par rapport à l'autre variable. Elle est dite équation *intégro-différentielle*.

Il peut d'ailleurs arriver qu'elle perde ce caractère, si, par exemple, la fonctionnelle F est une fonction de $x(t)$ et $x'(t)$; il viendra

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = f\left(t, x, \frac{\partial x}{\partial t}\right),$$

et l'on aura une équation aux dérivées partielles ordinaires. Il nous arrivera de comprendre ce cas sous la désignation d'équation intégro-différentielle. Cela simplifiera le langage pour la suite. Mais ce cas sera, en général, un cas difficile pour le développement de la théorie. Cela tient à ce que, dans ce cas, la fonctionnelle F est continue d'ordre 1 seulement, tandis que pour les équations intégro-différentielles proprement dites, elle est continue d'ordre 0, la dérivée $\frac{\partial x}{\partial t}$ n'intervenant pas. Il en résulte que pour ces dernières on peut aisément former les solutions par des approximations successives, tandis que la démonstration de l'existence des solutions des équations aux dérivées partielles donne lieu, comme on sait, à plus de difficultés.

L'une ou l'autre acception des équations intégro-différentielles partielles peut d'ailleurs se généraliser aux cas où, au lieu de deux variables t et λ, on en a un plus grand nombre, l'équation ayant le caractère d'équation intégrale par rapport aux unes et aux dérivées partielles par rapport aux autres [1]. Telle sera l'équation

$$F\left|\left[x(s\,|\,\lambda, \mu)\,|\,\frac{\partial x(t, \lambda, \mu)}{\partial \lambda}, \frac{\partial x(t, \lambda, \mu)}{\partial \mu}, t\right]\right| = 0$$

(les notations ayant la signification indiquée au n° 8).

---

[1] Une équation du type

$$\frac{dx(t)}{dt} + h(t)\,x(t) + \int_0^1 f(s, t)\,x(s)\,ds = \varphi(dt),$$

qui apparaîtrait comme intégrale et différentielle par rapport à la même variable, se ramène à une équation intégrale en prenant $\frac{dx}{dt}$ comme inconnue auxiliaire.

M. Volterra a fait une étude approfondie de ces équations intégro-différentielles, qui interviennent dans un grand nombre de problèmes physiques, l'un des groupes de variables comprenant la variable temps, l'autre les variables qui déterminent l'état du système étudié. L'exposé de ces travaux, qui se rattachent à l'algèbre fonctionnelle plutôt qu'à l'analyse fonctionnelle, puisqu'il s'agit de problèmes où les inconnues sont des fonctions, sortirait du cadre que nous nous sommes tracés. Nous exposerons seulement au Chapitre I de la deuxième Partie la méthode d'approximations successives dont il vient d'être question. Pour le reste, nous ne pouvons que renvoyer aux magistrales leçons de M. Volterra (*Leçons sur les fonctions de lignes;* Gauthier-Villars, 1913).

DEUXIÈME PARTIE.

LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES FONCTIONNELLES DU PREMIER ORDRE.

CHAPITRE I.

LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES FONCTIONNELLES GÉNÉRALISANT LES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENTIELLES TOTALES.

SOMMAIRE : Définition des équations étudiées dans ce Chapitre. — Réduction à une équation différentielle. — Cas de fonctionnelles dépendant de paramètres arbitraires. — La condition d'intégrabilité. — Cas de fonctionnelles dépendant de paramètres arbitraires. — Exemples d'équations complètement intégrables. — Cas des fonctions d'une ligne et de deux points.

1. **Définition des équations étudiées dans ce Chapitre.** — Les équations par lesquelles nous allons commencer cette étude constituent le type le plus simple d'équations aux dérivées fonctionnelles. Nous les appellerons dans la suite *équations aux dérivées fonctionnelles ordinaires* ou simplement *équations aux dérivées fonctionnelles*. Elles se déduisent, par le passage du fini à l'infini, de l'*équation aux différentielles totales*

$$(1) \qquad du = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots + p_n\,dx_n,$$

vérifiée par une fonction u de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les coefficients p étant des fonctions données de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et de u.

On sait que la théorie de ces équations repose sur deux circonstances fondamentales :

1° Si le point A ayant pour coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans

l'espace à n dimensions décrit une ligne L, son déplacement s'exprimant en fonction d'un paramètre λ, l'équation (1) qui donne la variation de u se réduit à une équation différentielle du premier ordre en λ et u. La fonction u est donc définie sur la ligne L si l'on se donne sa valeur en un point de cette ligne.

2° Si l'on se donne la valeur u_A de la fonction u en un point A, et qu'on veuille déterminer sa valeur u_B en un autre point B, on peut y arriver en considérant une ligne L allant de A à B. Mais il peut arriver que la valeur trouvée pour u_B dépende du choix de la ligne L; dans ce cas, il n'existera pas de fonction u prenant la valeur donnée en A et vérifiant l'équation (1). Les conditions pour que cette fonction existe, c'est-à-dire pour que u_B ne dépende pas du choix de la ligne L, sont dites *conditions d'intégrabilité de l'équation* (1), ou *conditions pour que du soit une différentielle exacte* [1]. On sait qu'elles s'obtiennent en écrivant que

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_j} + p_j \frac{\partial p_i}{\partial z} = \frac{\partial p_j}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial p_j}{\partial z} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Si ces conditions sont identiquement vérifiées, l'équation (1) est dite *complètement intégrable*, et la solution cherchée existe quelle que soit la valeur donnée u_A. Si elles sont incompatibles, l'équation (1) n'admet pas de solutions. Si, sans être identiquement vérifiées, elles sont compatibles, elles définissent une fonction $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (ou plusieurs fonctions); pour que l'équation (1) admette une solution, il faut que cette fonction (ou une de ces fonctions) vérifie cette équation.

Si nous passons à la limite, n devenant infini, l'équation (1) devient

$$(2) \qquad \delta U = \int_0^1 f[[x(t)|U, \tau]]\, \delta x(\tau)\, d\tau,$$

ce qu'on peut aussi écrire

$$(3) \qquad U'_{x(\tau)} = f[[x(t)|U, \tau]].$$

La recherche des fonctionnelles U de la fonction $x(t)$ qui vérifient cette équation est un problème analogue à la recherche des solutions

---

[1] *Voir* sur ce sujet la Note qui termine ce Chapitre.

de l'équation (1). Nous allons retrouver les deux circonstances fondamentales signalées à propos de cette équation.

2. Réduction à une équation différentielle. — Considérons une famille de fonctions $x(t)$ dépendant d'un paramètre λ. La fonctionnelle U se réduit pour ces fonctions à une fonction $\varphi(\lambda)$ de λ, et la fonction f à une fonction de λ, U, τ. L'équation (2) se réduit alors à une équation différentielle du premier ordre qui détermine $\varphi(\lambda)$ en fonction de λ si l'on connaît sa valeur initiale U_0 pour $\lambda = 0$.

Parmi les méthodes connues pour définir la solution d'une équation différentielle, celle qui s'applique le mieux au cas actuel est la méthode d'approximations successives de M. Picard. Nous allons l'appliquer en supposant

$$x(t) = x_0(t) + \lambda\xi(t),$$

$\xi(t)$ ayant pour module fonctionnel 1, c'est-à-dire vérifiant la condition

$$(4) \qquad \int_0^1 \xi^2(t)\,dt = 1,$$

et nous montrerons que le rayon de convergence des approximations a une limite inférieure indépendante du choix de la fonction $\xi(t)$. En d'autres termes, nous allons établir la convergence des approximations à l'intérieur d'une *sphère* de l'espace fonctionnel ayant pour centre le point A_0 qui représente la fonction $x(t)$.

Pour établir ce résultat, nous supposerons déterminées des constantes R, C, M, K telles que, pour

$$0 < \lambda < R, \qquad |U - U_0| < C, \qquad |V - U_0| < C,$$

on ait

$$(5) \qquad \int_0^1 f^2 |[x(t)|U_0, \tau]|\,d\tau < M^2,$$

$$(6) \qquad \int_0^1 \{f|[x(t)|U, \tau]| - f|[x(t)|V, \tau]|\}^2\,d\tau < K^2(U - V)^2.$$

Les approximations seront définies par la formule

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_p(\lambda) - U_0 = \displaystyle\int_0^\lambda d\mu \int_0^1 f|[x_0(t) + \mu\xi(t)|\varphi_{p-1}(\mu), \tau]|\,d\tau \\ \qquad\qquad (p = 1, 2, \ldots), \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit

$$\varphi_p(\lambda) - \varphi_{p-1}(\lambda) = \int_0^\lambda d\mu \int_0^1 \{ f[[x_0(t) + \mu\,\xi(t)]\,\varphi_{p-1}(\mu), \tau] - f[[x_0(t) + \mu\,\xi(t)]\,\varphi_{p-2}(\mu), \tau] \}\,\xi(\tau)\,d\tau.$$

Donc, tant que l'on a

$$(8) \qquad |\varphi_i(\mu) - U_0| < C \qquad (i = 1, 2, \ldots, p-1,\ \mu < \lambda),$$

on a, d'après (4) et (6),

$$|\varphi_p(\lambda) - \varphi_{p-1}(\lambda)| < \int_0^\lambda d\mu\, K\,|\varphi_{p-1}(\mu) - \varphi_{p-2}(\mu)|$$

et, par suite, en tenant compte de (5),

$$|\varphi_1(\lambda) - U_0| < M\lambda,$$

$$|\varphi_2(\lambda) - \varphi_1(\lambda)| < KM\frac{\lambda^2}{2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$|\varphi_p(\lambda) - \varphi_{p-1}(\lambda)| < K^{p-1}M\frac{\lambda^p}{p!},$$

d'où

$$|\varphi_p(\lambda) - U_0| < \frac{M}{K}\left(K\lambda + K^2\frac{\lambda^2}{2} + \ldots + \frac{K^p\lambda^p}{p!}\right) < \frac{M}{K}(e^{K\lambda} - 1).$$

On voit alors que, tant que λ ne dépasse pas la plus petite des quantites R et $\frac{1}{K}\log\left(1 + \frac{CK}{M}\right)$, la formule (8) ne peut cesser d'être vérifiée et les formules suivantes restent exactes. La convergence des approximations est donc établie, et il résulte immédiatement de la formule (7) que la fonction $U = \varphi(\lambda)$ ainsi définie comme limite des fonctions $\varphi_p(\lambda)$ est une solution de l'équation (2) prenant la valeur U_0 pour $\lambda = 0$.

On peut évidemment élargir les hypothèses faites dans cette démonstration. Mais, de toute façon, comme pour les équations différentielles ordinaires, il existe des cas *singuliers* dans lesquels la méthode est en défaut, une solution n'étant pas déterminée par sa valeur initiale.

3. **Cas de fonctionnelles dépendant de paramètres arbitraires.** — Il peut arriver que l'on ait à considérer des fonctionnelles dépendant, non seulement de la fonction $x(t)$, mais aussi d'un ou plusieurs paramètres, soit, pour fixer les idées, un paramètre α variant de 0 à 1.

Si une telle fonctionnelle U_α vérifie une équation aux dérivées fonctionnelles de la forme (2), la forme de la fonction f dépendra évidemment de α. Mais cette dépendance peut être plus ou moins simple.

Il peut arriver que la fonctionnelle f soit de la forme

$$f\,|\,[x(t)\,|\,U_\alpha, \tau, \alpha]\,|,$$

étant ainsi une fonctionnelle de $x(t)$ et une fonction au sens ordinaire du mot de U_α, τ et α. La variation de U_α, pour une certaine valeur de α, pourra ainsi s'exprimer sans faire intervenir les valeurs de U_α pour d'autres valeurs que α. L'équation aux dérivées fonctionnelles peut être ainsi étudiée pour chaque valeur de α indépendamment des autres, et cette étude présentera les mêmes caractères que si le paramètre α n'existait pas. Nous dirons dans ce cas que α *figure comme paramètre* dans l'équation étudiée.

Il peut aussi arriver que, pour chaque valeur α_0 de α, la fonction f soit de la forme

$$f\,|\,[x(t), U_\alpha\,|\,\tau, \alpha_0]\,|,$$

dépendant des valeurs de U_α pour toutes les valeurs de α comprises entre 0 et 1 et non seulement de U_{α_0}. Nous dirons alors que α figure *essentiellement* dans l'équation étudiée.

Il est évident que, dans ce cas, l'équation (2) n'est plus réductible à une équation différentielle. Si nous considérons une famille de fonctions $x(t)$ dépendant d'un paramètre λ, U_α devient une fonction de deux variables λ et α, soit $\varphi(\alpha, \lambda)$; la fonction f devient une fonction de λ, τ, α_0, dépendant en outre, pour chaque valeur de λ, de la forme de $\varphi(\alpha, \lambda)$ considéré comme fonction de α. L'équation (2) prend alors la forme

$$(9) \qquad \frac{\partial\varphi(\alpha_0, \lambda)}{\partial\lambda} = \Phi\,|\,[\varphi(\overset{1}{\underset{0}{\alpha}}, \lambda)]\lambda, \alpha_0]\,|,$$

la fonctionnelle Φ dépendant des valeurs de $\varphi(\alpha, \lambda)$ pour toutes les valeurs de α entre 0 et 1, mais seulement pour la valeur particulière de λ figurant au premier membre.

En général, cette équation n'est pas une équation différentielle. Φ peut être une fonction de $\left[\frac{\partial\varphi(\alpha, \lambda)}{\partial\alpha}\right]_{\alpha=\alpha_0}$, λ, α_0; c'est alors une équation aux dérivées partielles. Un cas plus général est celui où Φ est

de la forme

$$\int_0^1 F\left[\lambda, \alpha_0, \varphi(\alpha, \lambda), \frac{\partial \varphi(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha}, \ldots, \frac{\partial^p \varphi(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha^p}\right] d\alpha.$$

L'équation (9) est alors d'un des types étudiés par M. Volterra sous le nom d'équations *intégro-différentielles*.

Le principe de la méthode d'approximations successives de M. Picard s'applique encore et la formule de définition des approximations, qui doit remplacer la formule (7), est aisée à écrire. Mais la démonstration de la convergence des approximations peut présenter, dans certains cas, des difficultés plus sérieuses, comme c'est d'ailleurs bien évident, puisque le type actuellement considéré comprend des équations aux dérivées partielles comme cas particuliers.

Nous pouvons considérer quand même qu'une solution de l'équation (9) est déterminée si l'on connaît sa valeur pour $\lambda = 0$. Les cas où il n'en est pas ainsi ne peuvent être considérés que comme des cas d'exception, analogues à ceux qui se présentent pour les points singuliers des équations différentielles ordinaires.

4. **La condition d'intégrabilité.** — Si l'on se donne la valeur U_0, pour une fonction $x_0(t)$, d'une solution de l'équation (2), et qu'on veuille déterminer sa valeur U_1 pour une fonction $x_1(t)$, on peut y arriver, d'après ce qui précède, en considérant une famille de fonctions $x(t)$, dépendant d'un paramètre λ, et variant d'une manière continue de $x_0(t)$ à $x_1(t)$; en employant le langage géométrique, les fonctions $x_0(t)$ et $x_1(t)$ seront représentées par deux points A_0 et A_1 de l'espace fonctionnel, et les fonctions dépendant de λ par une *ligne* L allant de A_0 à A_1.

Mais, comme nous l'avons fait à propos de l'équation (1), nous devons nous demander si la valeur obtenue U_1 ne dépend pas du choix de la ligne L, c'est-à-dire de la manière dont varie la fonction $x(t)$ entre $x_0(t)$ et $x_1(t)$.

Considérons donc deux lignes L et L′ allant de A_0 en A_1. Les points de ces lignes peuvent toujours être considérés comme déduits d'un ensemble E de points dépendant d'une manière continue de deux paramètres λ et μ. Pour ces points, c'est-à-dire pour les fonctions $x(t)$ représentées par ces points, U se réduit à une fonction de deux variables λ et μ, et l'équation (2) à une équation aux différen-

tielles totales. Le problème de calcul fonctionnel que nous considérons se ramène donc, non comme celui traité n°s 2 et 3 à un problème à une variable, mais à un problème à deux variables. On sait qu'on obtient la condition pour que la valeur U_1 obtenue en A_1 soit la même pour toutes les lignes L formées de points de l'ensemble E, en écrivant que

$$\delta\delta_1 U = \delta_1 \delta U, \tag{10}$$

en posant, comme nous l'avons fait n° 66 de la première Partie,

$$\delta(..) = \frac{\partial(..)}{\partial\lambda} d\lambda, \qquad \delta_1(..) = \frac{\partial(..)}{\partial\mu} d\mu.$$

Pour que l'équation (2) admette une solution U prenant en chaque point A de l'espace fonctionnel une valeur indépendante de la ligne allant de A_0 en A, il est évidemment nécessaire et suffisant [1] que l'équation (10) soit vérifiée, *pour cette fonctionnelle* U, et pour toutes les déterminations possibles de $x(t)$, $\delta x(t)$, $\delta_1 x(t)$. La condition que cette équation soit vérifiée, pour une certaine fonction $x(t)$ et une certaine valeur de U, quelles que soient les fonctions $\delta x(t)$ et $\delta_1 x(t)$, conduit à une ou plusieurs relations entre U et $x(t)$, qui jouent dans la théorie actuelle le même rôle que les conditions d'intégrabilité dans la théorie de l'équation (1), et que nous appellerons *conditions d'intégrabilité* de l'équation (2).

Sans employer ce mot, nous avons déjà étudié (n°s 66 à 68 de la première Partie) la forme que devait avoir $\delta U'_x$ pour que l'équation (10) soit vérifiée quelles que soient les fonctions $\delta x(t)$ et $\delta_1 x(t)$. Pour appliquer les résultats obtenus, il faut ici déduire $\delta U'_x$ de la formule (3) en tenant compte, bien entendu, non seulement de ce que $x(t)$ varie, mais de ce que U varie, sa variation étant donnée par l'équation (2). On trouve ainsi, pour $\delta U'_x$, une certaine fonctionnelle linéaire $E(\delta x)$, et la condition cherchée est que cette fonctionnelle soit identique à son adjointe.

Rappelons que, dans le cas important où $E(\delta x)$ est de la forme

$$A_0\,\delta x + A_1\,\delta x' + \ldots + A_p\,\delta x^{(p)} + \int_0^1 \varphi(t, t_1)\,\delta x_1\,dt_1,$$

il faut écrire séparément :

---

[1] *Voir* la Note à la fin du Chapitre.

1° Que $\varphi(t, t_1)$ est une fonction symétrique de t et de t_1;

2° Que l'expression

$$A_0 \delta x + A_1 \delta x' + \ldots + A_p \delta x^{(p)}$$

est identique à son adjointe. Nous appellerons respectivement ces conditions la *première* et la *seconde condition d'intégrabilité* de l'équation (2).

5. Ces conditions devant être vérifiées quelle que soit la fonction $x(t)$ devront être considérées comme incompatibles si elles ne sont pas compatibles quelle que soit cette fonction; dans ce cas il n'existera évidemment aucune solution de l'équation (2).

Si elles sont compatibles, deux circonstances sont possibles :

1° Il peut arriver qu'elles soient vérifiées quelle que soit la valeur de U. Dans ce cas, l'équation (2) est dite *complètement intégrable*. Elle admet des solutions dépendant d'un paramètre arbitraire. On peut, en effet, choisir arbitrairement la valeur U_0 de U pour la fonction $x_0(t)$. L'équation (2) définit la variation de U quand $x(t)$ varie, et comme la condition d'intégrabilité ne saurait cesser d'être vérifiée, la valeur trouvée pour une fonction $x_1(t)$ est indépendante des déterminations intermédiaires de $x(t)$.

2° Il peut arriver que les conditions d'intégrabilité ne soient vérifiées, pour chaque fonction $x(t)$, que pour certaines valeurs de U. Toute solution de l'équation (2) devant vérifier ces conditions, nous n'avons à chercher les solutions de l'équation (2) que parmi les valeurs ainsi définies. Il est, en général, facile de voir si une ou plusieurs de ces valeurs sont solutions de (2), et par suite, si cette équation admet des solutions.

6. **Cas de fonctionnelles dépendant de paramètres arbitraires.** — Le principe des raisonnements précédents s'applique sans modification. Mais la valeur initiale U_0 de U pour la fonction $x_0(t)$ n'est plus une constante donnée, mais une fonction donnée des paramètres considérés $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ [1].

Dans le cas où les conditions d'intégrabilité sont vérifiées identi-

[1] Le cas où, au lieu de ces paramètres en nombre fini, on a une autre fonction arbitraire sera étudié à part au Chapitre IV, en raison de son importance particulière.

quement, c'est-à-dire quelle que soit la fonction $x(t)$, quelles que soient les valeurs de ces paramètres (qui interviennent dans l'expression de $\delta U'_x$), et quelle que soit, pour la fonction considérée $x(t)$, la forme de U considéré comme fonction des paramètres α, l'équation étudiée sera dite *complètement intégrable* et admettra des solutions dépendant évidemment d'une fonction arbitraire de n variables.

Dans le cas où, sans être identiquement vérifiées, les conditions d'intégrabilité sont compatibles [il faut comprendre ici : compatibles pour toutes les déterminations de $x(t)$ et pour toutes les valeurs des paramètres α], elles définiront certaines valeurs de U qui, pour chaque fonction $x(t)$, pourront encore dépendre de paramètres ou de fonctions d'arbitraires (mais bien entendu pas d'une fonction arbitraire de n variables). Il n'est plus alors aussi simple que dans le cas où il n'y a pas de paramètres de reconnaître si certaines de ces valeurs sont des solutions de l'équation (2). Il faut, en général, procéder de la manière suivante :

Soit à chercher, pour une détermination $x_0(t)$ de $x(t)$, les fonctions de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, que l'on peut prendre comme valeur initiale de U. Elles doivent d'abord vérifier les conditions d'intégrabilité. Il faut ensuite que, $x(t)$ variant infiniment peu, et la variation de U étant définie par l'équation étudiée, les conditions d'intégrabilité restent vérifiées quelle que soit la fonction $\delta x(t)$; ceci donne un deuxième groupe de conditions que doit vérifier la valeur initiale de U. En écrivant que ces nouvelles conditions restent vérifiées quand $x(t)$ varie, on obtient un troisième groupe de conditions, et ainsi de suite. Nous avons ainsi des conditions dites *conditions d'intégrabilité de rangs* 2, 3, ...

Il peut arriver qu'à un certain moment les équations obtenues soient incompatibles. L'équation étudiée n'admettra alors aucune solution, du moins aucune solution régulière [1] pour la fonction $x(t)$ considérée. Si la même circonstance se présente pour toutes les déterminations $x_0(t)$, cette équation n'a pas de solution.

Si cette circonstance ne se presente pas, les conditions obtenues

---

[1] Nous appelons *régulière* une fonctionnelle représentable dans le voisinage de la fonction considérée $x_0(t)$ par la série de Taylor

$$U = U_0 + \delta U + \frac{1}{2}\delta^2 U + \ldots + \frac{1}{n!}\delta^n U + \ldots.$$

resteront indéfiniment compatibles. Il peut arriver qu'après un nombre fini d'opérations, les nouvelles conditions obtenues ne soient pas distinctes des précédentes [1]; il peut arriver qu'on trouve successivement une infinité de conditions distinctes. Dans les deux cas, on aura formé toutes les conditions devant être vérifiées par la valeur initiale de U, pour qu'il existe une solution de l'équation étudiée correspondant à cette valeur. La démonstration rigoureuse de l'existence de cette solution est d'ailleurs liée à la démonstration rigoureuse de l'existence de la solution de l'équation (9), à laquelle se réduit l'équation étudiée lorsque l'on considère des fonctions $x(t)$ ne dépendant que d'un paramètre.

7. Exemples d'équations complètement intégrables. — Les considérations précédentes s'appliquent, bien entendu, au cas des fonctions Φ d'une ligne C; on forme alors les conditions d'intégrabilité en utilisant les résultats du n° 75 de la première Partie, dont nous conservons les notations.

Proposons-nous de chercher toutes les équations complètement intégrables de la forme

$$\delta\Phi = \int_C f(\Phi, M)\,\delta n\,ds, \tag{10}$$

M étant le point de la ligne C correspondant à la valeur s de la longueur d'arc. La fonction f est une fonction de Φ et des deux coordonnées de M, indépendante de la forme du contour C. On a

$$\begin{aligned}\delta\Phi'_n &= \frac{\partial f}{\partial\Phi}\,\delta\Phi + \frac{df}{dn}\,\delta n\\ &= \frac{df}{dn}\,\delta n + \int_C \frac{\partial f(\Phi, M)}{\partial\Phi}\,f(\Phi, M_1)\,\delta n_1\,ds_1.\end{aligned}$$

Cette expression doit être identique à son adjointe. Il faut et il suffit pour cela que le coefficient de $\delta n_1\,ds_1$ dans l'intégrale soit une fonction symétrique des points M et M_1, ce qui s'écrit

$$\frac{\dfrac{\partial}{\partial\Phi}f(\Phi, M)}{f(\Phi, M)} = \frac{\dfrac{\partial}{\partial\Phi}f(\Phi, M_1)}{f(\Phi, M_1)}.$$

---

[1] Si la condition de rang n est une conséquence des précédentes, il en est sûrement de même de toutes les suivantes.

La valeur commune des deux membres est alors une fonction de Φ seulement, d'où il résulte immédiatement que f est de la forme

$$f(\Phi, M) = g(\Phi)\,\varphi(M).$$

L'équation (10) s'écrit alors

$$\frac{\delta\Phi}{g\Phi} = \int_C \varphi(M)\,\delta n\,ds = \delta\Psi, \tag{11}$$

Ψ étant une *fonctionnelle additive* de la région intérieure à C.

Les équations complètement intégrables de la forme (10) sont donc de la forme (11); elles admettent comme solutions des fonctions de fonctionnelles additives.

8. **Cas des fonctions d'une ligne et de deux points.** — Désignons par Φ_B^A une fonction d'un contour C et de deux points A et B, et considérons les équations du type

$$\delta\Phi_B^A = \int_C f(\Phi_B^A, \Phi_M^A, \Phi_B^M)\,\delta n\,ds, \tag{12}$$

qui comprennent comme cas particulier une équation importante que nous rencontrerons dans l'étude de la fonction de Green.

Proposons-nous de chercher toutes les équations de ce type qui soient *complètement intégrables dans le champ des fonctions symétriques* (1). Nous entendons par là que, si l'on se donne une fonction symétrique quelconque (2) des points A et B, il existe une solution de l'équation (12) égale à la fonction donnée pour un contour particulier C_0 *et qui pour un contour quelconque soit encore symétrique* en A et B.

---

(1) J'ai traité dans ma Thèse (Chap. II) un problème plus général, en supposant que la fonction f dépende aussi des points A, B, M. Cette généralisation, en rendant l'aspect des formules un peu plus compliqué, ne change rien d'essentiel aux calculs ni aux résultats. J'ai aussi traité le cas où l'on ne se restreint pas au champ des fonctions symétriques; l'étude de ce cas est un peu plus difficile.

(2) Il est entendu qu'on exclut toute singularité telle que les formules qui suivront cessent d'avoir un sens. Cette remarque est importante, car on exclut ainsi les fonctions de Green, par l'étude desquelles on est conduit à des équations du type (2) ou d'un type un peu plus général. La singularité de ces fonctions nous obligera donc à une étude spéciale.

Nous poserons

$$\Phi_B^A = \alpha, \qquad \Phi_M^A = \beta, \qquad \Phi_B^M = \gamma,$$
$$\Phi_{M_1}^M = \delta, \qquad \Phi_{M_1}^A = \beta_1, \qquad \Phi_B^{M_1} = \gamma_1,$$

M_1 étant un point du contour C; nous appellerons ds_1 l'élément d'arc décrit par ce point.

Pour que la fonction Φ_B^A, étant symétrique, le reste lorsque le contour C se déforme d'une manière quelconque, il est évidemment nécessaire et suffisant que la fonction $f(\alpha, \beta, \gamma)$ soit symétrique en β et γ. Pour traiter le problème posé, nous devons donc chercher *toutes les fonctions $f(\alpha, \beta, \gamma)$, symétriques en β et γ, et telles que la condition d'intégrabilité soit identiquement vérifiée lorsque Φ_B^A est symétrique en* A *et* B.

La variation de la fonction f est

$$\begin{aligned}
\delta f(\alpha, \beta, \gamma) &= \frac{\partial f}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta}\delta\beta + \frac{\partial f}{\partial \gamma}\delta\gamma \\
&= \int_C \Big[\frac{\partial f(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \alpha} f(\alpha, \beta_1, \gamma_1) \\
&\qquad + \frac{\partial f(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \beta} f(\beta, \beta_1, \delta) + \frac{\partial f(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \gamma} f(\gamma, \delta, \gamma_1)\Big]\delta n_1\, ds_1 \\
&\qquad + \frac{\partial f(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \beta}\frac{d\beta}{dn}\delta n + \frac{\partial f(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \gamma}\frac{d\gamma}{dn}\delta n.
\end{aligned}$$

La condition d'intégrabilité s'obtient en écrivant que cette fonctionnelle linéaire de δn est identique à son adjointe, c'est-à-dire que le coefficient de $\delta n_1\, ds_1$ dans l'intégrale est une fonction symétrique des points M et M_1. Il vient ainsi

$$\begin{aligned}
(13) \qquad & \frac{\partial f(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \alpha} f(\alpha, \beta_1, \gamma_1) + \frac{\partial f(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \beta} f(\beta, \beta_1, \delta) \\
& + \frac{\partial f(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \gamma} f(\gamma, \delta, \gamma_1) \\
& = \frac{\partial f(\alpha, \beta_1, \gamma_1)}{\partial \alpha} f(\alpha, \beta, \gamma) + \frac{\partial f(\alpha, \beta_1, \gamma_1)}{\partial \beta_1} f(\beta_1, \beta, \delta) \\
& + \frac{\partial f(\alpha, \beta_1, \gamma_1)}{\partial \gamma_1} f(\gamma_1, \delta, \gamma),
\end{aligned}$$

et nous devons chercher toutes les fonctions $f(\alpha, \beta, \gamma)$ symétriques en β et γ vérifiant *identiquement* cette équation, car la condition que Φ_B^A soit symétrique en A et B n'empêche pas $\alpha, \beta, \gamma, \beta_1, \gamma_1, \delta$

d'être quelconques; elle est seulement intervenue pour nous permettre de représenter $\Phi_{M_1}^{M}$ et $\Phi_{M'}^{M_1}$ par le même symbole δ.

9. Dérivons l'équation (13) par rapport à β, γ_1, δ. Il vient

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma)\,\varphi(\gamma, \delta, \gamma_1) = \varphi(\alpha, \beta_1, \gamma_1)\,\varphi(\beta_1, \beta, \delta), \tag{14}$$

en posant

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\partial^2 f(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial\beta\,\partial\gamma}. \tag{15}$$

La fonction $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ apparaît ainsi comme un produit de trois facteurs dépendant l'un de α, l'autre de β et le troisième de γ. Comme elle est évidemment symétrique en β, γ, on peut poser

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{g_2(\beta)\,g_2(\gamma)}{g_1(\alpha)}.$$

Le premier membre de l'équation (14) devant être indépendant de γ, on a

$$\frac{g_2(\gamma)}{g_1(\gamma)} = c,$$

c étant une constante. Posant alors

$$g'(\alpha) = c^2\,g_1(\alpha) = c\,g_2(\alpha),$$

il vient

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{g'(\beta)\,g'(\gamma)}{g'(\alpha)}. \tag{16}$$

10. Il peut arriver que la fonction $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ soit identiquement nulle. Commençons par traiter ce cas. La formule (15) donne alors, en tenant compte de la symétrie de $f(\alpha, \beta, \gamma)$ en β et γ,

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = h(\alpha, \beta) + h(\alpha, \gamma). \tag{17}$$

L'équation (13) dérivée par rapport à δ, s'écrit alors

$$\psi(\alpha, \beta)\,\psi(\beta, \delta) + \psi(\alpha, \gamma)\,\psi(\gamma, \delta) = \psi(\alpha, \beta_1)\,\psi(\beta_1, \delta) + \psi(\alpha, \gamma_1)\,\psi(\gamma_1, \delta), \tag{18}$$

en posant

$$\psi(\alpha, \beta) = \frac{\partial\,h(\alpha, \beta)}{\partial\beta}. \tag{19}$$

La formule (18) nous montre que le produit $\psi(\alpha, \beta)\ \psi(\beta, \delta)$ est

indépendant de β. La fonction $\psi(\alpha, \beta)$ est donc de la forme

$$\psi(\alpha, \beta) = c\frac{h'_1(\beta)}{h'_1(\alpha)},$$

h'_1 désignant une fonction arbitraire. Les formules (17) et (19) donnent alors

$$(20) \qquad f(\alpha, \beta, \gamma) = c\frac{h_1(\beta) + h_1(\gamma)}{h'_1(\alpha)} + f_1(\alpha).$$

Or on peut faire sur l'équation (12) un changement de fonction inconnue en posant

$$(21) \qquad \Psi_B^A = h_1(\Phi_B^A),$$

h_1 étant une fonction primitive de h'_1. La nouvelle équation aux dérivées fonctionnelles est évidemment complètement intégrable en même temps que l'ancienne. En y remplaçant Ψ par Φ et en conservant les mêmes notations, la forme de la fonction $f(\alpha, \beta, \gamma)$ devient

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = f_1(\alpha) + c(\beta + \gamma).$$

En portant cette valeur de la fonction f dans l'équation (13), celle-ci se réduit à

$$c^2(\beta_1 + \gamma_1) = c^2(\beta + \gamma),$$

c'est-à-dire à $c = 0$. La formule (20) se réduit donc à

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = f_1(\alpha).$$

L'équation aux dérivées fonctionnelles étudiée est alors de la forme

$$\frac{\delta\Phi_B^A}{f_1(\Phi_B^A)} = \int_C \delta n\, ds = \delta S$$

(S étant l'aire intérieure au contour C, si l'on suppose δn compté positivement vers l'extérieur) qui est un cas particulier de la forme (11). On devait s'attendre à trouver cette équation, les points A et B n'intervenant pas, ou n'intervenant que comme paramètres dans les solutions de l'équation considérée.

11. Revenons au cas où la fonction $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ n'est pas identiquement nulle. Elle est alors de la forme (16), et l'équation (15)

donne, en tenant compte de la symétrie de $f(\alpha, \beta, \gamma)$,

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{g(\beta)\, g(\gamma)}{g'(\alpha)} + h(\alpha, \beta) + h(\alpha, \gamma),$$

la fonction g étant une fonction primitive de la fonction g'.

Si alors nous faisons le changement d'inconnue

$$(22) \qquad g\left(\Phi_B^A\right) = \Phi_B^A,$$

analogue à celui défini par la formule (21), la fonction $f(\alpha, \beta, \gamma)$ relative à l'équation aux dérivées fonctionnelles vérifiée par Ψ_B^A est de la forme

$$(23) \qquad f(\alpha, \beta, \gamma) = \beta\gamma + h(\alpha, \beta) + h(\alpha, \gamma).$$

En tenant compte de cette formule, et posant toujours

$$(24) \qquad \frac{\partial h(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = \psi(\alpha, \beta),$$

on a, par dérivation de l'équation (13) par rapport à δ,

$$(25) \qquad \begin{aligned} &[\gamma + \psi(\alpha, \beta)][\beta_1 + \psi(\beta, \delta)] + [\beta + \psi(\alpha, \gamma)][\gamma_1 + \psi(\gamma, \delta)] \\ &= [\gamma_1 + \psi(\alpha, \beta_1)][\beta + \psi(\beta_1, \delta)] + [\beta_1 + \psi(\alpha, \gamma_1)][\gamma + \psi(\gamma_1, \delta)]. \end{aligned}$$

Dérivant à nouveau par rapport à β et γ, et faisant $\gamma = \beta$, on a

$$\frac{\partial \psi(\beta, \delta)}{\partial \beta} = 0.$$

Donc $\psi(\alpha, \beta)$ se réduit à une fonction $\psi(\beta)$ de son second argument, et l'équation (25) devient

$$\begin{aligned} &\psi(\delta)[\beta + \psi(\beta) + \gamma + \psi(\gamma) - \beta_1 - \psi(\beta_1) - \gamma_1 - \psi(\gamma_1)] \\ &= \beta\psi(\beta_1) + \gamma\psi(\gamma_1) - \beta_1\psi(\beta) - \gamma_1\psi(\gamma). \end{aligned}$$

Le second membre ne dépendant pas de δ, il en est de même du premier, ce qui exige, soit que $\psi(\delta)$ soit une constante, soit que son coefficient soit nul, c'est-à-dire que $\beta + \psi(\beta)$ soit une constante. En tout cas, on a

$$\psi(\alpha, \beta) = \psi(\beta) = c\beta + c_1,$$

et par suite, en tenant compte des formules (23) et (24),

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \beta\gamma + f_1(\alpha) + \frac{c}{2}(\beta^2 + \gamma^2) + c_1(\beta + \gamma).$$

Portant cette valeur dans l'équation (13), on voit que le terme $\beta\beta_1^2$ a pour coefficient $\frac{c^2}{2}$. Il faut donc que $c = 0$. Un nouveau changement de fonction inconnue, remplaçant α, β, γ par $\alpha - c_1$, $\beta - c_1$, $\gamma - c_1$, fait alors disparaître le terme en c_1, et il vient

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \beta\gamma + f_1(\alpha).$$

Portant cette nouvelle valeur dans l'équation (13), elle se réduit à

$$\frac{df_1(\alpha)}{d\alpha}(\beta_1\gamma_1 - \beta\gamma) = \gamma_1 f_1(\beta_1) + \beta_1 f_1(\gamma_1) - \gamma f_1(\beta) - \beta f_1(\gamma).$$

Le second membre ne dépendant pas de α, il doit en être de même du premier, de sorte que la fonction $f_1(\alpha)$ est de la forme $c'\alpha + c''$. Substituant cette forme, on voit enfin que c' et c'' sont nuls, de sorte que

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \beta\gamma.$$

L'équation aux dérivées fonctionnelles étudiée se trouve ainsi réduite, par le changement de fonction inconnue, à la forme

$$\delta\varphi_B^A = \int_C \Phi_M^A \Phi_B^M \, \delta n \, ds. \tag{26}$$

12. Les résultats des n°s 10 et 11 conduisent à énoncer le théorème suivant :

Si une équation aux dérivées fonctionnelles de la forme

$$\delta\Phi_B^A = \int_C f(\Phi_B^A, \Phi_M^A, \Phi_B^M) \, \delta n \, ds$$

est complètement intégrable dans le champ des fonctions symétriques des points A *et* B, *ou bien la fonction* f *est une fonction de son premier argument seulement, de sorte que les points* A *et* B *ne figurent que comme paramètres dans l'équation donnée, ou bien cette fonction est réductible, par un changement de la fonctionnelle inconnue, à la forme*

$$\delta\Phi_B^A = \int_C \Phi_M^A \Phi_B^M \, \delta n \, ds.$$

Cette équation, ainsi que M. Hadamard l'a découvert et que nous

l'exposerons plus loin, joue un grand rôle dans la théorie de la fonction de Green. Nous l'appellerons l'*équation de M. Hadamard*.

NOTE SUR LA CONDITION D'INTÉGRABILITÉ.

En raison du rôle fondamental de la condition d'intégrabilité, il n'est peut-être pas inutile de rappeler comment se présente cette condition dans la théorie des équations aux différentielles totales. Nous exposerons cette question sous une forme un peu différente de la forme habituelle, plus simple, à notre avis, en tout cas se prêtant mieux aux généralisations que nous avons en vue.

a. Considérons l'équation à deux variables indépendantes

$$dz = X(x, y, z)\,dx + Y(x, y, z)\,dy. \tag{1}$$

Si une fonction z vérifie cette équation, ses dérivées premières sont X et Y, et l'on en déduit deux expressions de $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ qui doivent être égales, ce qui donne

$$\frac{\partial X}{\partial y} + Y\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial x} + X\frac{\partial Y}{\partial z}. \tag{2}$$

Telle est la condition d'intégrabilité, évidemment *nécessaire*.

Soit maintenant à résoudre le problème de Cauchy relatif à l'équation (1), c'est-à-dire à déterminer une solution de cette équation égale à z_0 pour $x = y = 0$. Pour la calculer en un point ξ, η, nous pouvons faire varier d'abord x de 0 à ξ, puis y de 0 à η, et intégrer l'équation (1) le long du contour ainsi défini. En d'autres termes, la variation de z sera définie sur l'axe des x par la condition $\frac{\partial z}{\partial x} = X$, et sur une parallèle quelconque à l'axe des y par la condition $\frac{\partial z}{\partial y} = Y$. La fonction z ainsi définie vérifie donc une équation de la forme

$$dz = (X + u)\,dx + Y\,dy, \tag{3}$$

u étant une fonction de x et y, dont nous savons seulement qu'elle s'annule pour $y = 0$.

D'ailleurs, le problème de Cauchy posé ne pouvant admettre d'autre solution que la fonction z ainsi obtenue, il est nécessaire et

suffisant, pour qu'il ait une solution, que cette fonction vérifie l'équation (1), c'est-à-dire que $u = 0$.

Il est évidemment nécessaire pour cela que la fonction z ainsi formée vérifie la condition (2). Je dis que, réciproquement, cela est suffisant.

Supposons donc cette condition vérifiée. D'autre part, z, vérifiant l'équation (3), vérifie la condition d'intégrabilité correspondante

$$(4) \qquad \frac{\partial(X+u)}{\partial y} + Y\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial x} + (X+u)\frac{\partial Y}{\partial z}.$$

La comparaison des formules (2) et (4) donne

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u\frac{\partial Y}{\partial z},$$

d'où

$$u(x, \eta) = u(x, 0)\, e^{\int_0^{\eta} \frac{\partial Y}{\partial z} dy} = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si la condition (2) est une identité en x, y, z, on a ainsi une solution, quel que soit z_0. La solution de l'équation (1) dépend d'un paramètre.

Si c'est une relation entre x, y, z, contenant effectivement z, il peut y avoir des solutions de (1), si la fonction z définie par la condition d'intégrabilité est bien solution de (1); en général, il n'y en a pas.

Si c'est une relation entre x et y, il ne peut pas y avoir de solutions.

b. Supposons maintenant que z soit fonction de x, y, et d'un paramètre α, variant par exemple de 0 à 1 et que ses dérivées X et Y, par rapport à x et y, soient données par des formules de la forme

$$(5) \qquad \begin{cases} X(x, y, \alpha_0) = F\left|\left[z(x, y, \overset{1}{\underset{0}{\alpha}}) \,|\, x, y, \alpha_0\right]\right|, \\ Y(x, y, \alpha_0) = G\left|\left[z(x, y, \overset{1}{\underset{0}{\alpha}}) \,|\, x, y, \alpha_0\right]\right|, \end{cases}$$

les fonctionnelles F et G dépendant des valeurs de z pour les valeurs particulières de x et y que l'on considère, mais pour toutes les valeurs de α entre 0 et 1.

Chacune de ces équations est du type (9) considéré dans le Chapitre qui précède, avec cette différence qu'elle contient une variable

(x ou y) figurant comme paramètre. L'ensemble de ces équations définit la variation de z quand x et y varient, par exemple de la manière indiquée au paragraphe a; on a ainsi une fonction z bien déterminée, solution des équations

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \mathrm{F} + u(x, y, \alpha), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \mathrm{G},$$

la fonction $u(x, y, \alpha)$ s'annulant pour $x = 0$.

Les deux valeurs de $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ déduites de ce système sont égales. Pour faciliter l'écriture, supposons que les variations des fonctionnelles F et G lorsque la fonction z varie s'expriment par les intégrales de M. Volterra :

$$\int_0^1 \mathrm{F}'_{z(\alpha)}\, \delta z\, d\alpha, \qquad \int_0^1 \mathrm{G}'_{z(\alpha)}\, \delta z\, d\alpha.$$

Il vient

$$(6) \qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} + \int_0^1 \mathrm{F}'_{z(\alpha)} \mathrm{Y}(x, y, \alpha)\, d\alpha$$
$$= \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x} + \int_0^1 \mathrm{G}'_{z(\alpha)} [\mathrm{X}(x, y, \alpha) + u(x, y, \alpha)]\, d\alpha.$$

La condition d'intégrabilité du système (5) s'obtient en faisant $u = 0$. Elle est nécessaire pour que $u = 0$ et que, par suite, la fonction z formée soit solution de l'équation (5). Elle est aussi suffisante, car elle entraîne, en tenant compte de (6),

$$(7) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \int_0^1 \mathrm{G}'_{z(\alpha)}\, u(x, y, \alpha)\, d\alpha.$$

Cette équation intégro-différentielle définit parfaitement $u(x, y, \alpha_0)$ si l'on connaît sa valeur initiale pour $y = 0$, et si cette valeur initiale est nulle, u est partout nul. C. Q. F. D.

Si la variation des fonctionnelles F et G n'est pas de la forme considérée, si notamment elle contient des termes dépendant spécialement de l'allure de la fonction $z(x, y, \alpha)$ dans le voisinage du point $\alpha = 0$, l'équation (7) sera remplacée par une intégro-différentielle d'un type un peu plus général, donnant $\frac{\partial u(x, y, \alpha_0)}{\partial y}$ sous la forme d'une fonctionnelle linéaire dépendant des valeurs prises par $u(x, y, \alpha)$ quand α varie de 0 à 1, fonction en outre de x, y, α_0. Mais la conclusion que cette équation entraîne $u = 0$, si la valeur initiale $u(x, 0, \alpha_0)$ est nulle, subsiste.

c. Soit maintenant une fonction z de trois variables x_1, x_2, x_3, assujettie à vérifier l'équation aux différentielles totales

$$dz = X_1(x_1, x_2, x_3, z)\,dx_1 + X_2(x_1, x_2, x_3, z)\,dx_2 + X_3(x_1, x_2, x_3, z)\,dx_3.$$

Cette équation permet de calculer la variation de z quand on fait varier x_1, x_2, x_3 suivant une loi déterminée, et il est évidemment nécessaire, pour que le résultat soit indépendant du chemin suivi, que

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} + X_j \frac{\partial X_i}{\partial z} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i} + X_i \frac{\partial X_j}{\partial z} \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Je dis que cette condition est suffisante. En effet, si l'on considère des systèmes de valeurs x_1, x_2, x_3 dépendant d'une manière quelconque de deux paramètres λ et μ, représentant des points x_1, x_2, x_3 décrivant une surface S, on vérifie sans peine que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\lambda\,\partial\mu} = \frac{\partial^2 z}{\partial\mu\,\partial\lambda},$$

c'est-à-dire que le résultat est indépendant du chemin suivi pour faire varier x_1, x_2, x_3, à condition que ce chemin soit sur la surface S. Mais deux chemins quelconques allant de l'origine à un même point x_1, x_2, x_3 peuvent toujours être considérés comme étant sur une même surface S. Le résultat est donc indépendant du chemin suivi.

Il n'y a pas de difficulté à considérer, au lieu de la fonction $u(x_1, x_2, x_3)$, une fonction d'un plus grand nombre de variables, ou bien une fonctionnelle, ce qui conduit au problème traité dans le Chapitre précédent. Nous rencontrerons au Chapitre IV une généralisation un peu différente. Il n'y a jamais de difficulté à étendre le raisonnement du paragraphe *a* de cette Note, et nous pouvons toujours affirmer que la condition d'intégrabilité, toujours aisée à former et évidemment nécessaire, est aussi suffisante.

d. Bien entendu, dans le cas où cette condition n'est pas identiquement vérifiée, il faut choisir une détermination initiale de la fonction ou fonctionnelle étudiée qui la vérifie, puis écrire qu'elle reste vérifiée pour les nouvelles valeurs de cette fonction ou fonctionnelle déduites de proche en proche des équations données. On obtient ainsi, en général, de nouvelles conditions de plus en plus restrictives, comme nous l'avons montré au n° 6.

CHAPITRE II.

L'ÉQUATION AUX DÉRIVÉES FONCTIONNELLES DE LA FONCTION DE GREEN.

SOMMAIRE : *Le problème de Dirichlet et la fonction de Green dans le cas du plan :* L'équation de Laplace. — Les potentiels de simple et de double couche. — Le problème de Dirichlet. — La fonction de Green. — Cas du cercle. — Singularité de la fonction de Green. — Application de la représentation conforme. — Le problème de Dirichlet dans l'espace. — *La variation de la fonction de Green :* La formule de M. Hadamard. — La variation des dérivées de la fonction de Green. — *Intégrabilité de l'équation* (25) : Formation de la condition d'intégrabilité. — Étude du cas régulier — Étude du cas singulier.

LE PROBLÈME DE DIRICHLET ET LA FONCTION DE GREEN DANS LE CAS DU PLAN.

Il peut être utile, pour faciliter la lecture de la suite à un aussi grand nombre de lecteurs que possible, de rappeler d'abord les propriétés classiques des fonctions harmoniques et de la fonction de Green. Le lecteur au courant de ces questions peut passer les n°s 13 à 20.

13. **L'équation de Laplace.** — Une fonction u de deux variables x et y, coordonnées d'un point du plan, est dite *harmonique* lorsqu'elle vérifie *l'équation de Laplace :*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Cette équation ne change pas par un changement de coordonnées rectangulaires. Si en particulier on prend comme axes de coordonnées la tangente et la normale à une courbe, on a, en conservant les notations du n° 76 de la première Partie,

$$\Delta u = \frac{d^2 u}{dn^2} + \frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{d^2 u}{dn^2} + \frac{d^2 u}{ds^2} - k\frac{du}{dn}. \tag{2}$$

La formule de Green, appliquée à deux fonctions harmoniques u et v, s'écrit

$$(3) \qquad \int_C \left(u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn} \right) ds = 0,$$

les fonctions u et v étant harmoniques et continues ainsi que leurs dérivées premières à l'intérieur du contour fermé C, et ds étant l'élément d'arc de C décrit par le point M dont dépendent u et v. Si en particulier $v = 1$, on a

$$(4) \qquad \int_C \frac{du}{dn} ds = 0.$$

La fonction $\log \frac{1}{\rho}$, ρ étant la distance de deux points A et M, est une fonction harmonique de chacun de ces points. Si l'on veut appliquer la formule de Green à u et $\log \frac{1}{\rho}$, considérées comme fonctions de M, et si A est intérieur au contour C, il faut isoler ce point par un petit cercle. On trouve ainsi

$$(5) \qquad u_A = \frac{1}{2\pi} \int_C \left(u \frac{d}{dn} \log \frac{1}{\rho} - \log \frac{1}{\rho} \frac{du}{dn} \right) ds,$$

la direction positive de la normale étant dirigée vers l'intérieur de C.

14. Les potentiels de simple et de double couche. — On appelle ainsi respectivement les intégrales

$$V_A = \int_C \mu(s) \log \frac{1}{\rho} ds,$$

$$W_A = \int_C \mu(s) \frac{d}{dn} \log \frac{1}{\rho} ds,$$

$\mu(s)$ étant la *densité* du potentiel considéré [1].

Si A n'est pas sur le contour C, la règle habituelle de dérivation des intégrales définies s'applique et il en résulte que les potentiels sont des fonctions harmoniques du point A.

Les formules qui définissent les potentiels conservent un sens

---

[1] Il résulte immédiatement de ces définitions que, pour $\mu(s) = 1$, W_A représente l'angle sous lequel la ligne C est vue du point A, en comptant positivement les angles pour les parties de C pour lesquelles A est du côté positif choisi sur la normale. Si C est un contour fermé et A intérieur à C, on a donc $W_A = 2\pi$.

lorsque A, *supposé intérieur au contour*, tend vers un point a du contour; mais W_A ne tend pas vers W_a. On a

$$(6)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{A\to a} V_A = V_a, \\ \lim\limits_{A\to a} W_A = W_a + \pi\mu_a, \end{cases}$$

μ_a étant la valeur de $\mu(s)$ au point a.

Si l'on désigne par $\frac{d}{dn_a}$ une dérivée prise en supposant un déplacement de A parallèle à la normale intérieure en a, on a

$$\frac{dV_A}{dn_a} = \int_C \mu(s)\frac{d}{dn_a}\log\frac{1}{\rho}\,ds.$$

Cette intégrale conserve un sens lorsque A vient en a, mais, de même que W_A, elle n'est pas continue. On a

$$(7)\qquad \lim_{A\to a}\frac{dV_A}{dn_a} = \int_C \mu(s)\frac{d}{dn_a}\log\frac{1}{\rho_a}\,ds - \pi\mu_a,$$

ρ_a désignant la distance aM.

La dérivée normale de W_A est continue, en ce sens qu'elle a la même valeur limite suivant que A tend vers a d'un côté ou de l'autre de C. Mais l'intégrale qui représente cette dérivée cesse d'avoir un sens quand A est en a, la fonction $\frac{d^2}{dn\,dn_a}\log\frac{1}{\rho_a}$ devenant infinie pour $\rho_a = 0$. Elle est la somme de $\frac{1}{\rho_a^2}$ et d'une quantité finie. On peut obtenir une expression commode de la limite considérée en écrivant

$$(8)\qquad \lim_{A\to a}\frac{dW_A}{dn_a} = \text{v. p.}\int_C [\mu(s)-\mu_a]\frac{d^2}{dn\,dn_a}\left(\log\frac{1}{\rho_a}\right)ds,$$

le symbole v. p. désignant la *valeur principale au sens de Cauchy* (*voir* n° 52 de la première Partie).

Les formules (6) et (7) supposent simplement $\mu(s)$ continue en a; pour la formule (8), il n'est même pas suffisant de supposer l'existence et la continuité de la dérivée $\mu'(s)$; on peut l'établir en supposant en outre l'existence de la dérivée seconde $\mu''(s)$, hypothèse qui peut d'ailleurs être remplacée par d'autres moins restrictives. Mais, de plus, la formule (8) suppose essentiellement que C soit un contour *fermé*. Dans le cas contraire, il y aurait lieu d'ajouter au second

membre le terme

$$-\mu_a \frac{d\varphi_a}{dn_a},$$

φ_a étant l'angle sous lequel on voit de a une ligne C′ joignant les extrémités de C, et telle que le sens positif choisi sur la normale à C en a soit dirigé vers l'intérieur du contour fermé formé par C et C′.

Si l'on considère les dérivées $\frac{d}{dt_a}$ relatives à une direction parallèle à la tangente en a, on a

$$(9)\quad \begin{cases} \lim\limits_{A \to a} \dfrac{dV_A}{dt_a} = \dfrac{dV_a}{ds_a} = \text{v. p.} \displaystyle\int_C \mu(s) \frac{d}{ds_a} \log \frac{1}{\rho_a}\, ds, \\ \lim\limits_{A \to a} \dfrac{dW_A}{dt_a} = \dfrac{d(W_a + \pi\mu_a)}{ds_a} = \pi\mu'_a + \displaystyle\int_C \mu(s) \frac{d^2}{dn\, ds_a} \log \frac{1}{\rho_a}\, ds. \end{cases}$$

Indiquons enfin que, pour tout arc analytique C_1 de C sur lequel $\mu(s)$ est holomorphe, les fonctions

$$(10)\qquad \frac{d}{dn} \log \frac{1}{\rho_a},\quad \frac{d}{dn_a} \log \frac{1}{\rho_a},\quad \frac{d^2}{dn\, dn_a} \log \frac{1}{\rho_a} - \frac{1}{\rho_a^2},\quad V_a,\quad W_a$$

sont holomorphes. Si, de plus, $\mu(s)$ est sur toute la courbe C une fonction holomorphe de certains paramètres, les valeurs de V_A et W_A à l'intérieur de C et leurs valeurs limites sur l'arc considéré C_1 sont des fonctions holomorphes de ces paramètres et du point A. Cette proposition est connue sous le nom de *théorème de Bruns*.

15. **Le problème de Dirichlet.** — Ce problème consiste à déterminer une fonction harmonique u_A, continue, ainsi que ses dérivées premières, dans la région intérieure à un contour C, connaissant sa valeur u en tout point M de C. Nous supposerons la valeur donnée sur C fonction continue de M [1].

Le problème ainsi posé admet une solution et une seule.

La démonstration de l'unicité résulte aisément de la formule (4).

Pour démontrer qu'il en existe une, il suffit, par la méthode de M. Fredholm, de montrer que, pour une détermination convenable de $\mu(s)$, le potentiel W_A résout le problème. Comme ce potentiel est harmonique, il suffit qu'il prenne la valeur u sur le contour, ce qui,

---

[1] On pourrait admettre certaines discontinuités.

d'après la formule (6), conduit à définir $\mu(s)$ par l'équation de Fredholm

$$\pi\mu_a + \int_C \mu(s) \frac{d}{dn} \log \frac{1}{\rho_a} ds = u_a. \tag{11}$$

Le noyau de cette équation est holomorphe. Son déterminant ne peut être nul, car s'il était nul, on pourrait trouver une fonction $\mu(s)$ non nulle qui annulerait le premier membre et le potentiel correspondant W_A serait une solution non nulle du problème de Dirichlet correspondant à des données nulles sur le contour, ce qui est contraire à l'unicité de la solution.

Il existe donc une fonction $\mu(s)$, donnée par une formule de la forme

$$\pi\mu_a = u_a + \int_C u\, \varphi(s, s_a)\, ds, \tag{12}$$

le fonction φ étant holomorphe. Le potentiel W_A est alors une solution du problème de Dirichlet, et, de plus, nous voyons que, si le contour C est analytique et si les valeurs données u sont des fonctions holomorphes de s et de certains paramètres, $\mu(s)$ et, par suite, $W_A = u_A$ sont des fonctions holomorphes du point A et de ces paramètres. Cette proposition est due à MM. Schwarz et Hadamard [1].

16. **La fonction de Green.** — Pour pouvoir résoudre le problème de Dirichlet, quelle que soit la fonction donnée u sur le contour, il suffit de savoir le résoudre lorsque cette fonction est égale à la valeur prise sur le contour par la fonction $\log \frac{1}{r}$, r désignant la distance de A à un point B quelconque intérieur à C. Ce problème n'est pas résolu par la fonction $\log \frac{1}{r}$ elle-même, cette fonction étant harmonique, mais infinie au point B. Soit h_B^A la fonction qui le résout. On appelle *fonction de Green* la fonction

$$g_B^A = \log \frac{1}{r} - h_B^A. \tag{13}$$

---

[1] J. Hadamard, *Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées* (*Mémoires présentés à l'Académie des Sciences*, t. XXXIII, 1908, p. 23-27). *Voir* aussi mon *Mémoire sur l'allure des fonctions de Green et de Neumann dans le voisinage du contour* (*Acta mathematica*, t. 42).

Elle est ainsi définie par les conditions d'être *la somme de* $\log \frac{1}{r}$ *et d'une fonction harmonique et régulière du point* A, *et de s'annuler quand* A *est sur le contour.*

En appliquant la formule de Green aux fonctions g_A^M et g_B^M (il faut, pour cela, isoler les points A et B par des petits cercles), on obtient la formule

$$g_B^A = g_A^B.$$

La fonction de Green est donc une fonction symétrique des points A et B. C'est donc une fonction harmonique de B aussi bien que de A, et elle s'annule lorsqu'un quelconque des points A et B vient sur le contour.

En appliquant la formule de Green à g_A^M et à la fonction harmonique u_A, on obtient la formule

$$u_A = \frac{1}{2\pi} \int_C u \frac{dg_M^A}{dn} ds, \tag{14}$$

qui résout le problème de Dirichlet.

La résolution de ce problème est ainsi ramenée à la connaissance de la fonction de Green, et il suffit même de connaître $\frac{dg_M^A}{dn}$, qui est une fonction d'un point du contour et d'un point intérieur au contour, c'est-à-dire une fonction de trois variables seulement. On peut même observer qu'il suffit de connaître la valeur de la fonction

$$\mathcal{G}_M^a = \frac{d^2 g_M^a}{dn\, dn_a}, \tag{15}$$

a et M étant deux points du contour. En effet, cette fonction étant connue, la fonction

$$\frac{d}{dn}\left(g_M^A - \log \frac{1}{\rho}\right) = \frac{d}{dn} h_M^A$$

qui est une fonction du point A, harmonique et régulière à l'intérieur de C, et connue sur le contour ainsi que sa dérivée normale, est définie en tout point A intérieur à C par la formule (5). La fonction $\frac{dg_M^A}{dn}$ est ainsi connue, et la formule (14) résout le problème de Dirichlet.

La fonction $\mathcal{G}_b^a$, bien définie lorsque a et b sont des points du

contour, et dont la connaissance équivaut à celle de la fonction de Green elle-même, est la première dérivée de cette fonction qui ne soit pas nulle. Toutes les autres dérivées, pour les points du contour, s'en déduisent immédiatement; ainsi la formule (2) donne

$$(16)\qquad \frac{d^3 g_b^a}{dn_a^2\, dn_b} = k_a \frac{d^2 g_b^a}{dn_a\, dn_b} = k_a \mathcal{G}_b^a, \qquad \frac{d^3 g_b^a}{dn_a\, dn_b^2} = k_b \mathcal{G}_b^a,$$

k_a et k_b désignant les valeurs de la courbure de C en a et b.

17. Cas du cercle. — Lorsque C est un cercle de rayon R, on a

$$(17)\qquad g_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} = \log \frac{d}{\mathrm{R}} \frac{r'}{r},$$

d désignant la distance de B au centre du cercle, et r' la distance de A au point B′ conjugué de B dans le cercle; on vérifie immédiatement que cette expression possède bien les propriétés qui servent de définition à la fonction de Green. On en déduit

$$(18)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dg_{\mathrm{M}}^{\mathrm{A}}}{dn} &= 2\frac{d}{dn}\log\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\mathrm{R}} = \frac{2p}{\rho^2} - \frac{1}{\mathrm{R}}, \\ \mathcal{G}_b^a &= \frac{1}{2\mathrm{R}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2}{\overline{ab}^2}, \end{aligned} \right.$$

ρ désignant toujours la distance AM, p désignant la distance de A à la tangente au cercle en M, θ l'angle des rayons du cercle aboutissant aux points a et b, $\overline{ab}$ la distance de ces deux points. Il est à remarquer que $\mathcal{G}_b^a$ ne dépend que de la distance $\overline{ab}$, et non du rayon du cercle passant par ces deux points.

18. Singularité de la fonction de Green. — D'après la définition de cette fonction, et d'après le théorème de MM. Schwarz et Hadamard, la fonction $h_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}}$ est holomorphe, de sorte que $g_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}}$ a même singularité que $\log\frac{1}{r}$, lorsque A et B sont intérieurs au contour C et que de plus le point B ne s'approche pas du contour. Mais il n'en est plus de même lorsque B est sur le contour; c'est alors la fonction $g_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}}$ qui est holomorphe (étant nulle), et $h_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}}$ a la même singularité que $\log\frac{1}{r}$. On est alors conduit à se demander ce qui a lieu lorsque A et B tendent vers un même point du contour.

Pour résoudre cette question, partons de la remarque que

$$2\frac{d}{dn}\log\frac{1}{\rho} = \frac{2p}{\rho^2}$$

se réduit, quand A vient en un point a du contour, à une fonction holomorphe des points a et M. La fonction $\varphi(A, M)$, définie comme étant une fonction harmonique de A, sans singularité à l'intérieur de C ni sur C, égale à la précédente sur le contour, est donc, d'après le théorème de MM. Schwarz et Hadamard, une fonction holomorphe des points A et M.

L'intégrale

$$\frac{1}{2\rho}\int_C\left[2\frac{d}{dn}\log\frac{1}{\rho} - \varphi(A, M)\right]u\,ds$$

est donc une fonction harmonique de A, égale à u sur le contour (en raison de la discontinuité du potentiel de double couche). Elle est donc égale à u_A, et la comparaison de cette formule, qui donne une nouvelle solution du problème de Dirichlet, avec la formule (14), donne

$$\frac{dg_M^A}{dn} = 2\frac{d}{dn}\log\frac{1}{\rho} - \varphi(A, M). \tag{19}$$

La fonction φ étant holomorphe, la singularité de $\frac{dg_M^A}{dn}$ est ainsi parfaitement connue.

Or cette fonction, permettant de résoudre le problème de Dirichlet, permet en particulier de déterminer h_B^A, et par suite g_B^A. On a ainsi

$$g_B^A = \log\frac{1}{r} - \frac{1}{2\pi}\int_C\frac{dg_M^A}{dn}\log\frac{1}{\rho'}\,ds, \tag{20}$$

ρ' désignant la distance MB. Tenant compte de l'expression (19), on voit que g_B^A est la somme d'une fonction holomorphe des deux points A et B et de

$$\log\frac{1}{r} - \frac{1}{\pi}\int_C\log\frac{1}{\rho'}\frac{d}{dn}\log\frac{1}{\rho}\,ds. \tag{21}$$

L'application de la formule de Green aux fonctions $\log\frac{1}{\rho}$ et $\log\frac{1}{\rho'}$ montre que l'expression précédente est identiquement égale à

$$\log\frac{1}{r} - \frac{1}{\pi}\int_C\log\frac{1}{\rho}\frac{d}{dn}\log\frac{1}{\rho'}\,ds = \log\frac{1}{r} - \frac{1}{2\pi}\int_C\frac{d}{dn}\left(\log\frac{1}{\rho}\log\frac{1}{\rho'}\right)ds. \tag{22}$$

Enfin on déduit de la formule (19) que $\mathcal{G}_b^a$ est la somme de $\frac{2}{ab^2}$ et d'une fonction holomorphe des points a et b du contour.

Le problème posé est ainsi résolu simplement pour la fonction de Green et celles de ses dérivées qui joueront le plus grand rôle dans la suite.

Les résultats précédents, reposant sur le théorème de MM. Schwarz et Hadamard, supposent naturellement le contour analytique. Si, au lieu de vouloir connaître la fonction de Green avec une erreur qui soit une fonction holomorphe, on se propose seulement d'obtenir une erreur qui reste finie ainsi que ses dérivées jusqu'à un ordre déterminé p, il suffit de supposer que les coordonnées du point M du contour soient des fonctions de s continues ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre $p+1$.

19. **Application de la représentation conforme.** — Considérons une représentation conforme de la région intérieure à C sur la région intérieure à C′, et appelons A′ et B′ les points qui correspondent à A et B. Une fonction harmonique du point A devient une fonction harmonique du point A′. D'autre part, la différence

$$\log\frac{1}{r} - \log\frac{1}{r'},$$

r' désignant la distance A′B′, est holomorphe. On en déduit que

$$g_B^A = g'^{A'}_{B'},$$

g' désignant la fonction de Green relative au contour C′, car la différence de ces deux quantités est une fonction harmonique de A′ (ou de A), sans singularité, et nulle sur le contour.

Pour déterminer g_B^A, il suffit donc de connaître une représentation conforme de la région intérieure sur une région pour laquelle on connaisse la fonction de Green, par exemple un cercle. On peut aisément en déduire une autre méthode pour l'étude de la singularité de la fonction de Green.

Appelons $f(A)$ le rapport entre un chemin infiniment petit décrit par le point A′ et le chemin correspondant décrit par le point A. On a évidemment, A et B venant en a et b sur le contour,

$$g_b^a = \frac{d^2 g_b^a}{dn_a\, dn_b} = f(a)f(b)\frac{d^2 g'^{a'}_{b'}}{dn_{a'}\, dn_{b'}}.$$

Prenons pour C′ une circonférence de rayon 1 et représentons la correspondance entre les points de C et ceux de C′ par la relation

$$s' = F(s).$$

La fonction f, en un point de C, est évidemment la dérivée de S, de sorte qu'il vient, en tenant compte des formules (18),

$$(23) \qquad \mathcal{G}_b^a = \frac{F'(s_a)\,F'(s_b)}{2\sin^2\dfrac{F(s_b) - F(s_a)}{2}}.$$

Nous avions déjà ramené le problème de Dirichlet à la détermination de la fonction $\mathcal{G}_b^a$. La formule (23) nous montre qu'il se ramène à la détermination de la formule d'une seule variable $F(s)$. Cette fonction étant connue, il se résout par deux quadratures.

20. **Le problème de Dirichlet dans l'espace.** — La plupart des résultats précédents s'étendent au cas de l'espace, en remplaçant le potentiel logarithmique $\log\frac{1}{r}$ par le potentiel newtonien $\frac{1}{r}$ $\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right.$ dans l'espace à n dimensions$\left.\right)$, et le facteur 2π qui intervient dans un grand nombre de formules par le facteur 4π (d'une manière générale, le facteur à considérer est égal à la surface de la sphère de rayon 1).

Il y a toutefois deux circonstances qui rendent impossible la généralisation de certains des résultats précédents.

1° L'expression

$$\frac{d}{dn}\log\frac{1}{\rho} = \frac{p}{\rho^2}$$

est remplacée par l'expression

$$\frac{d}{dn}\frac{1}{\rho} = \frac{p}{\rho^3}$$

qui ne se réduit pas à une fonction holomorphe des points a et M quand A vient en a sur la surface, mais devient infinie pour $\rho = 0$.

L'équation de Fredholm (11) est alors remplacée par une équation à noyau singulier. M. Fredholm a d'ailleurs montré, par une méthode fort élégante, que les propriétés essentielles de son équation ne sont pas modifiées par une singularité de la nature de celle considérée ici,

et que sa méthode de résolution du problème de Dirichlet s'applique au cas de l'espace.

Mais il résulte de la singularité considérée qu'il n'est pas possible de généraliser les résultats du n° 19. Il ne semble pas possible, dans le cas de l'espace, de représenter par des quadratures en nombre fini une fonction ayant même singularité que la fonction de Green, c'est-à-dire différant d'elle par une fonction holomorphe. En tout cas, ce résultat n'est pas obtenu par les expressions qui correspondent aux expressions (21) et (22).

Dans un grand nombre de questions, il suffit d'ailleurs de connaître une fonction différant de la fonction de Green par une fonction restant finie, ainsi que ses dérivées jusqu'à un ordre déterminé. Ce résultat peut toujours être obtenu par des formules élémentaires, mais qui deviennent rapidement compliquées dès que l'ordre considéré est élevé ([1]).

2° La notion de représentation conforme ne s'étend pas au cas de l'espace. Il en résulte qu'on ne peut pas trouver de fonction d'un seul point de la surface, analogue à la fonction $F(s)$ du n° 19, dont la connaissance suffise pour résoudre le problème de Dirichlet. Ce problème ne peut être considéré comme résolu que quand on connaît au moins la fonction $\mathcal{G}_b^a$ de deux points de la surface. Cette circonstance augmente l'intérêt qu'il peut y avoir à considérer cette fonction.

Dans la suite, nous étudierons surtout le cas du plan et nous éviterons d'utiliser la notion de représentation conforme lorsque ce ne sera pas nécessaire, de manière à présenter les raisonnements sous une forme permettant l'extension au cas de l'espace.

LA VARIATION DE LA FONCTION DE GREEN.

21. La formule de M. Hadamard. — Supposons que le contour C se déforme, sa déformation étant définie à la manière habituelle par la donnée de δn en chaque point. Cherchons la variation δg_B^A de la fonction de Green, correspondant à cette déformation, les points A et B restant fixes. Nous désignerons par le symbole δ_1, lorsque les

---

([1]) *Voir* mon Mémoire déjà cité des *Acta mathematica*.

points A et B (ou un de ces points) sont sur le contour, la variation obtenue en supposant qu'ils restent sur le contour (ou que le point considéré y reste) en se déplaçant normalement à lui.

Lorsque B est fixe et intérieur à C, il résulte de la formule (13) que δg_B^A est harmonique et sans singularité à l'intérieur de C. Cette fonction est donc définie si l'on connaît sa valeur, lorsque A vient en un point a du contour. Or, dans ce cas, on a évidemment

$$(24) \qquad \delta g_B^a = \delta_1 g_B^a - \frac{dg_B^a}{dn_a}\delta n_a = -\frac{dg_B^a}{dn_a}\delta n_a.$$

On en déduit, en appliquant la formule (14),

$$(25) \qquad \delta g_B^A = -\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{dg_M^A}{dn}\frac{dg_B^M}{dn}\delta n\, ds.$$

Cette formule, due à M. Hadamard [1], donne la variation de la fonction de Green lorsque A et B sont fixes et *intérieurs au contour*.

Si A vient en a sur le contour, l'intégrale obtenue a la même discontinuité que le potentiel obtenu en remplaçant $\frac{dg_M^A}{dn}$ par sa partie infinie $2\frac{\log\frac{1}{\rho}}{dn}$, et l'on trouve pour δg_B^a, non zéro, mais l'expression déjà écrite (24). Si en même temps B vient en b sur le contour, on a de même, évidemment,

$$\delta g_b^a = -\frac{dg_b^a}{dn_a}\delta n_a - \frac{dg_b^a}{dn_b}\delta n_b.$$

22. La variation des dérivées de la fonction de Green. — Si A et B sont intérieurs au contour, la formule (25) peut être dérivée sans difficulté et donne la variation des dérivées de g_B^A.

Si A vient en un point a du contour, $\frac{dg_M^A}{dn}$ étant la somme de $2\frac{d\log\frac{1}{\rho}}{dn}$ et d'une fonction holomorphe, les intégrales obtenues se

---

[1] Voir *Comptes rendus*, 9 février 1903, et *Leçons sur le Calcul des variations*, p. 303 et suiv.

comportent comme les dérivées d'un potentiel de double couche de densité

$$-\frac{1}{\pi}\frac{dg_{\mathrm{B}}^{\mathrm{M}}}{dn}\delta n,$$

et l'on a, en tenant compte des formules (8) et (9),

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta\frac{dg_{\mathrm{B}}^{a}}{ds_a} &= -\frac{d}{ds_a}\left(\frac{dg_{\mathrm{B}}^{a}}{dn_a}\delta n_a\right)\\
&= -\frac{d^2 g_{\mathrm{B}}^{a}}{dt_a\,dn_a}\delta n_a - k_a\frac{dg_{\mathrm{B}}^{a}}{ds_a}\delta n_a - \frac{dg_{\mathrm{B}}^{a}}{dn_a}\delta n'_a\\
&= -\frac{d^2 g_{\mathrm{B}}^{a}}{dt_a\,dn_a}\delta n_a - \frac{dg_{\mathrm{B}}^{a}}{dn_a}\delta n'_a,\\
\delta\frac{dg_{\mathrm{B}}^{a}}{dn_a} &= -\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{v.p.}\int_{\mathrm{C}}\left[\mathcal{G}_{\mathrm{M}}^{a}\frac{dg_{\mathrm{B}}^{\mathrm{M}}}{dn}\delta n - 2\frac{d^2}{dn\,dn_a}\left(\log\frac{1}{\rho_a}\right)\frac{dg_{\mathrm{B}}^{a}}{dn_a}\delta n_a\right]ds.
\end{aligned}\right.$$

On a d'ailleurs

$$\int_{\mathrm{C}}\left[2\frac{d^2}{dn\,dn_a}\left(\log\frac{1}{\rho_a}\right) - \mathcal{G}_{\mathrm{M}}^{a}\right]ds = \frac{d}{dn_a}\int_{\mathrm{C}}\left[2\frac{d}{dn}\left(\log\frac{1}{\rho_a}\right) - \frac{dg_{\mathrm{M}}^{a}}{dn}\right]ds$$
$$= \lim_{\mathrm{A}\to a}\frac{d}{dn_a}\int_{\mathrm{C}}\left[2\frac{d}{dn}\left(\log\frac{1}{\rho}\right) - \frac{dg_{\mathrm{M}}^{\mathrm{A}}}{dn}\right]ds = \lim_{\mathrm{A}\to a}\frac{d}{dn_a}(4\pi - 2\pi) = 0$$

[d'après la note du n° 14 et la formule (14)], de sorte que l'on peut encore écrire

$$(26')\qquad \delta\frac{dg_{\mathrm{B}}^{a}}{dn_a} = -\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{v.p.}\int_{\mathrm{C}}\mathcal{G}_{\mathrm{M}}^{a}\left(\frac{dg_{\mathrm{B}}^{\mathrm{M}}}{dn}\delta n - \frac{dg_{\mathrm{B}}^{a}}{dn_a}\delta n_a\right)ds.$$

Considérons maintenant la variation δ_1, obtenue en tenant compte de ce que a reste sur le contour en se déplaçant normalement à lui, et qu'en même temps la direction de la tangente au contour en a tourne d'un angle $\delta n'_a$. La relation entre les variations δ et δ_1 a déjà été écrite avec d'autres notations [formules (31), n° 76, première Partie]. Il vient, avec les notations actuelles et en tenant compte des propriétés élémentaires de la fonction de Green,

$$\delta_1\frac{dg_{\mathrm{B}}^{a}}{ds_a} = \delta\frac{dg_{\mathrm{B}}^{a}}{ds_a} + \frac{d^2 g_{\mathrm{B}}^{a}}{dt_a\,dn_a}\delta n_a + \frac{dg_{\mathrm{B}}^{a}}{dn_a}\delta n'_a,$$
$$\delta_1\frac{dg_{\mathrm{B}}^{a}}{dn_a} = \delta\frac{dg_{\mathrm{B}}^{a}}{dn_a} + k_a\frac{dg_{\mathrm{B}}^{a}}{dn_a}\delta n_a$$

et, par suite, en tenant compte des formules (26),

$$(27)\quad \begin{cases} \delta_1 \dfrac{dg_{\mathrm{B}}^a}{ds_a} = 0, \\ \delta_1 \dfrac{dg_{\mathrm{B}}^a}{dn_a} = k_a \dfrac{dg_{\mathrm{B}}^a}{dn_a}\delta n_a \\ \qquad - \dfrac{1}{2\pi}\,\mathrm{v.p.}\displaystyle\int_{\mathrm{C}} \left[\mathcal{G}_{\mathrm{M}}^a \dfrac{dg_{\mathrm{B}}^{\mathrm{M}}}{dn}\delta n - 2\dfrac{d^2}{dn\,dn_a}\left(\log\dfrac{1}{\rho_a}\right)\dfrac{dg_{\mathrm{B}}^a}{dn_a}\delta n_a \right] ds. \end{cases}$$

La première de ces formules était évidente *a priori*.

Une méthode analogue s'applique pour les dérivées d'ordres supérieurs, et lorsque le point B vient en un point b du contour. On a ainsi, pour la variation de la dérivée $\mathcal{G}_b^a$,

$$(28)\quad \delta\mathcal{G}_b^a = -\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{v.p.}\int_{\mathrm{C}} \left[\mathcal{G}_{\mathrm{M}}^a \mathcal{G}_b^{\mathrm{M}}\delta n - 2\,\mathcal{G}_b^a\,\delta n_a \frac{d^2 \log\dfrac{1}{\rho_a}}{dn\,dn_a} - 2\,\mathcal{G}_b^a\,\delta n_b \frac{d^2\log\dfrac{1}{\rho_b}}{dn\,dn_b}\right] ds$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{v.p.}\int_{\mathrm{C}} (\mathcal{G}_{\mathrm{M}}^a \mathcal{G}_b^{\mathrm{M}}\delta n - \mathcal{G}_{\mathrm{M}}^a \mathcal{G}_b^a\,\delta n_a - \mathcal{G}_b^a \mathcal{G}_b^{\mathrm{M}}\delta n_b)\, ds,$$

$$(29)\quad \delta_1 \mathcal{G}_b^a = \delta\mathcal{G}_b^a + \mathcal{G}_b^a (k_a\,\delta n_a + k_b\,\delta n_b),$$

la valeur principale étant relative aux deux points singuliers a et b de l'intégrale, et k_a et k_b désignant les valeurs de la courbure en a et en b.

INTÉGRABILITÉ DE L'ÉQUATION (25).

23. Formation de la condition d'intégrabilité. — En remplaçant la fonction de Green dans l'équation (25) par une fonction inconnue $\Phi_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}}$, nous obtenons l'équation aux dérivées fonctionnelles

$$(30)\quad \delta\Phi_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{C}} \frac{d\Phi_{\mathrm{M}}^{\mathrm{A}}}{dn}\,\frac{d\Phi_{\mathrm{B}}^{\mathrm{M}}}{dn}\,\delta n\, ds.$$

Cette équation admet comme solution, non seulement la fonction de Green que nous venons de définir, mais aussi, comme il est facile de le vérifier, la fonction analogue relative à la région intérieure à C et extérieure à un ou plusieurs contours fixes intérieurs à C. La

condition d'intégrabilité est évidemment vérifiée pour toutes ces fonctions. Mais toutes ces fonctions sont des fonctions symétriques des points A et B, harmoniques, s'annulant lorsqu'un des points vient sur le contour, et ayant même singularité, c'est-à-dire telle que la différence de deux quelconques d'entre elles est holomorphe lorsque les points A et B sont voisins du contour. En raison de tous ces caractères communs, nous pouvons nous attendre à ce que la condition d'intégrabilité ne soit pas identiquement vérifiée.

Pour former cette condition, supposons d'abord que la fonction Φ_B^A soit finie et continue, ainsi que ses dérivées premières et secondes. On a dans ce cas

$$(31)\qquad \delta_1 \frac{d\Phi_M^A}{dn} = \frac{d^2\Phi_M^A}{dn^2}\,\delta n - \frac{d\Phi_M^A}{ds}\,\delta n' - \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{d\Phi_{M_1}^A}{dn_1}\,\frac{d^2\Phi_M^{M_1}}{dn_1\,dn}\,\delta n_1\,ds_1$$

et, par suite,

$$(32)\qquad \delta_1\left(\frac{d\Phi_M^A}{dn}\,\frac{d\Phi_B^M}{dn}\right)$$
$$= \left(\frac{d\Phi_M^A}{dn}\,\frac{d^2\Phi_B^M}{dn^2} + \frac{d^2\Phi_M^A}{dn^2}\,\frac{d\Phi_B^M}{dn}\right)\delta n - \left(\frac{d\Phi_M^A}{dn}\,\frac{d\Phi_B^M}{dn} + \frac{d\Phi_M^A}{dn}\,\frac{d\Phi_B^M}{dn}\right)\delta n'$$
$$- \frac{1}{2\pi}\int_C \left(\frac{d\Phi_M^A}{dn}\,\frac{d^2\Phi_{M_1}^M}{dn\,dn_1}\,\frac{d\Phi_B^{M_1}}{dn_1} + \frac{d\Phi_{M_1}^A}{dn_1}\,\frac{d^2\Phi_M^{M_1}}{dn_1\,dn}\,\frac{d\Phi_B}{dn}\right)\delta n_1\,ds_1.$$

ds
ds

Nous devons écrire que cette expression est identique à son adjointe.

Le coefficient de $\delta n_1\,ds_1$ dans l'intégrale est une fonction symétrique des points M et M_1. La première condition d'intégrabilité (n° 4) est donc identiquement vérifiée. La seconde condition d'intégrabilité exige que le coefficient de $\delta n'$ soit nul, puisque la dérivée la plus élevée de δn qui figure dans l'expression (32) doit être d'ordre pair. La valeur du coefficient de δn est indifférente. La seule condition d'intégrabilité est donc

$$(33)\qquad \frac{d\Phi_M^A}{ds}\,\frac{d\Phi_B^M}{dn} + \frac{d\Phi_M^A}{dn}\,\frac{d\Phi_B^M}{ds} = 0.$$

24. Le calcul précédent ne s'applique pas si la fonction Φ_B^A a la même singularité que la fonction de Green. Considérons maintenant

le cas d'une fonction de la forme

$$\Phi_B^A = g_B^A + h_B^A,$$

la fonction h_B^A étant supposée finie et continue, ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre 3, lorsque les points A et B sont tous les deux voisins du contour.

Tenant compte de la deuxième formule (26), on voit que

$$(34)\qquad \delta\frac{d\Phi_M^A}{dn} = -\frac{1}{2\pi}\frac{d\Phi_M^A}{dn}\delta n\int_C \frac{d^2 h_{M_1}^{M_1}}{dn_1\,dn}\,ds_1$$
$$-\frac{1}{2\pi}\,\text{v.p.}\int_C \frac{d^2\Phi_M^{M_1}}{dn_1\,dn}\left(\frac{d\Phi_{M_1}^A}{dn_1}\delta n_1 - \frac{d\Phi_M^A}{dn}\delta n\right)ds_1.$$

Les formules (31) et (32) sont alors remplacées par des formules dans lesquelles les coefficients de $\delta n'$ ne sont pas modifiés, de sorte que la condition (33) reste nécessaire. La modification du coefficient de δn est sans importance. Enfin, l'intégrale définie est modifiée, celle qui figure dans la formule (32) étant remplacée par l'expression

$$(35)\qquad -\frac{1}{2\pi}\,\text{v.p.}\int_C\left[\frac{d^2\Phi_{M_1}^M}{dn\,dn_1}\,\frac{d\Phi_M^A}{dn}\left(\frac{d\Phi_B^{M_1}}{dn_1}\delta n_1 - \frac{d\Phi_B^M}{dn}\delta n\right)\right.$$
$$\left.+\frac{d^2\Phi_M^{M_1}}{dn_1\,dn}\,\frac{d\Phi_B^M}{dn}\left(\frac{d\Phi_{M_1}^A}{dn_1}\delta n_1 - \frac{d\Phi_M^A}{dn}\delta n\right)\right]ds.$$

Si nous montrons que cette expression est identique à son adjointe, il en résultera que la condition d'intégrabilité, comme dans le cas régulier, est exprimée par la formule (33).

Nous supposerons que δn admette, non seulement une dérivée première continue, mais une dérivée seconde partout finie. Alors, tandis que $\frac{d^2\Phi_{M_1}^M}{dn\,dn_1}$ et $\frac{d^2\Phi_M^{M_1}}{dn_1\,dn}$ ont pour partie infinie celle de $\frac{d^2 g_{M_1}^M}{dn\,dn_1}$, c'est-à-dire $\frac{2}{(s_1-s)^2}$, leurs coefficients sont de la forme

$$\lambda(s_1-s)+\mu(s_1-s)^2,$$

λ et μ restant finis. Il en résulte que le passage à la limite représenté par le symbole v. p. s'effectue d'une manière uniforme, ce qui permet d'effectuer une quadrature par la règle de calcul habituelle.

Pour démontrer que l'expression (35) est identique à son adjointe, nous devons la multiplier par $\delta_1 n\,ds$, intégrer le long du contour C,

et vérifier que le résultat obtenu ne change pas si l'on échange les symboles δ et δ_1. Nous pouvons, dans l'expression obtenue, intervertir le symbole v. p. et le signe d'intégration, et considérer la valeur principale de l'intégrale double obtenue, c'est-à-dire la limite, pour $\varepsilon = 0$, de l'intégrale obtenue en supprimant les parties du champ d'intégration pour lesquelles

$$|s_1 - s| < \varepsilon.$$

Or le champ d'intégration ainsi défini ne change pas si l'on intervertit les points M et M_1, et la fonction intégrée diffère de la fonction obtenue en échangeant δn et $\delta_1 n$ par une fonction impaire, c'est-à-dire changeant de signe si l'on échange M et M_1, et dont, par suite, l'intégrale est nulle. L'intégrale double considérée, et par suite sa limite pour $\varepsilon = 0$, ne change donc pas si l'on intervertit les fonctions δn et $\delta_1 n$, de sorte que l'expression (35) est identique à son adjointe.

La formule (33) représente donc bien la condition d'intégrabilité, non sans doute dans le cas des fonctions ayant une singularité quelconque, mais dans le cas des fonctions régulières et dans le cas de celles ayant la même singularité que la fonction de Green.

Nous devons maintenant écrire que cette condition reste vérifiée quand le contour se déforme. Cela nous conduira à de nouvelles conditions; cette fois, les résultats obtenus dans le cas régulier et dans le cas singulier seront essentiellement différents.

25. Étude du cas régulier. — Nous supposerons Φ_B^A, non seulement, comme pour former la condition d'intégrabilité (33), fini et continu ainsi que ses dérivées premières et secondes, mais holomorphe, lorsque A et B sont voisins du contour.

On a, en tenant compte de l'équation (30),

$$(36) \qquad \delta_1 \frac{d\Phi_M^A}{ds} = \frac{d^2\Phi_M^A}{dt\,dn}\delta n + \frac{d\Phi_M^A}{dn}\delta n' - \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{d\Phi_{M_1}^A}{dn_1}\frac{d^2\Phi_{M_1}^{M_1}}{dn_1\,ds}\delta n_1\,ds_1.$$

Cette formule, la formule (31), et les formules analogues relatives à la fonction Φ_B^M permettent de former la variation du premier membre de la condition d'intégrabilité. Cette variation comprend une intégrale définie, un terme en δn, un terme en $\delta n'$, qui doivent être nuls séparément. Ecrivant d'abord que le coefficient de $\delta n'$ est

nul, il vient

$$\frac{d\Phi_M^A}{dn}\frac{d\Phi_B^M}{dn} - \frac{d\Phi_M^A}{ds}\frac{d\Phi_B^M}{ds} = 0. \tag{37}$$

Pour continuer la discussion, il y a deux cas à distinguer.

Premier cas. — L'un des facteurs $\frac{d\Phi_M^A}{dn}$ et $\frac{d\Phi_B^M}{dn}$ est nul; supposons pour fixer les idées que ce soit le premier, et qu'il reste nul lorsque le contour se déforme. L'équation (30) montre alors que Φ_B^A ne dépend pas du contour. Il en résulte de plus que Φ_B^A ne dépend pas de B, car, quels que soient le point B considéré et le déplacement de ce point à partir de sa position initiale, il suffit de considérer un contour passant en ce point et normal à ce déplacement. La dérivée normale de Φ_M^A étant nulle, Φ_B^A ne varie pas dans le déplacement considéré.

La fonction Φ_B^A est alors *une fonction d'un seul des points* A *et* B, *indépendante de l'autre et du contour*. Une telle fonction vérifie bien, évidemment, l'équation (30) et la condition d'intégrabilité (33).

Deuxième cas. — Supposons maintenant que $\frac{d\Phi_M^A}{dn}$ et $\frac{d\Phi_B^M}{dn}$ ne soient pas nuls, ou du moins ne le soient qu'accidentellement, pour un contour particulier, sans le rester quand le contour se déforme. Les équations (33) et (37) sont alors des équations linéaires et homogènes en $\frac{d\Phi_B^M}{dn}$ et $\frac{d\Phi_B^M}{ds}$, admettant un système de solutions non nulles. Leur déterminant est nul, ce qui donne

$$\left(\frac{d\Phi_M^A}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi_M^A}{dn}\right)^2 = 0,$$

ces deux termes n'étant pas nuls séparément, puisque $\frac{d\Phi_M^A}{dn}$ n'est pas nul.

Ce cas ne comporte pas de solution réelle. Pour les solutions imaginaires, il vient, en tenant compte de la formule (33),

$$\frac{d\Phi_M^A}{dn} = i\frac{d\Phi_M^A}{ds}, \qquad \frac{d\Phi_B^M}{dn} = -i\frac{d\Phi_B^M}{ds} \tag{38}$$

(ou bien les formules obtenues en remplaçant dans celle-ci i par $-i$).

Cette formule à son tour doit rester vérifiée quand le contour se déforme. Tenant compte des formules (31) et (36) et égalant les coefficients de δn dans les variations des deux membres, il vient

$$\frac{d^2\Phi_M^A}{dn^2} = i\frac{d^2\Phi_M^A}{dt\,dn}, \qquad \frac{d^2\Phi_B^M}{dn^2} = -i\frac{d^2\Phi_B^M}{dt\,dn}.$$

Recommençant à égaler les coefficients de δn dans les variations des deux membres, et ainsi de suite, on obtient successivement les conditions

$$\frac{d^p}{dn^p}\left(\frac{d\Phi_M^A}{dn} - i\frac{d\Phi_M^A}{dt}\right) = \frac{d^p}{dn^p}\left(\frac{d\Phi_B^M}{dn} + i\frac{d\Phi_B^M}{dt}\right) = 0 \qquad (p = 2, 3, \ldots, \infty),$$

qui montrent, puisque la fonction Φ_B^A est holomorphe, que les conditions (38) restent vérifiées lorsque le point M s'éloigne du contour.

La fonction Φ_B^A est alors *une fonction analytique de* $x_1 + iy_1$ *et de* $x_2 - iy_2$ (ou de $x_1 - iy_1$ et de $x_2 + iy_2$), x_1 et y_1 étant les coordonnées de A, x_2 et y_2 celles de B.

Ces conditions sont d'ailleurs suffisantes pour qu'il existe une solution de l'équation (30) égale pour un contour particulier à la fonction Φ_B^A. En effet, la forme de l'équation (30) montre qu'elles restent vérifiées lorsque le contour se déforme, et la condition d'intégrabilité, qui résulte de ces conditions, reste également vérifiée.

26. Étude du cas singulier. — Supposons maintenant que Φ_B^A soit la somme de la fonction Green et d'une fonction h_B^A holomorphe lorsque les points A et B sont voisins du contour.

La formule (36) n'est plus exacte, l'intégrale qui y figure représentant la variation $\delta\frac{d\Phi_M^A}{dt}$ lorsque M est intérieur au contour, et étant discontinue à la limite comme l'est, d'après la formule (9), la dérivée d'un potentiel de double couche de densité

$$-\frac{2}{2\pi}\frac{d\Phi_M^A}{dn}\delta n.$$

Il y a donc lieu d'ajouter le terme

$$-\frac{d}{ds}\left(\frac{d\Phi_M^A}{dn}\delta n\right) = -\frac{d^2\Phi_M^A}{dt\,dn}\delta n + k\frac{d\Phi_M^A}{ds}\delta n - \frac{d\Phi_M^A}{dn}\delta n',$$

et il vient

$$(39)\qquad \delta_1 \frac{d\Phi_M^A}{ds} = k\frac{d\Phi_M^A}{ds}\delta n - \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{d\Phi_{M_1}^A}{dn_1}\frac{d^2\Phi_M^{M_1}}{dn_1\,ds}\delta n_1\,ds_1.$$

Cette formule et les résultats du n° 24 permettent de former la variation du premier membre de la condition d'intégrabilité. Annulant le coefficient de $\delta n'$, il vient

$$\frac{d\Phi_M^A}{ds}\frac{d\Phi_B^M}{ds} = 0.$$

Ces deux facteurs, dont le produit est nul, doivent d'ailleurs être nuls tous deux. Si par exemple le premier était nul et non le second, d'après la formule (33) la dérivée $\frac{d\Phi_M^A}{dn}$ serait nulle, et d'après l'équation (30), Φ_B^A serait indépendant du contour, ce qui n'est pas possible, puisque sa partie infinie en dépend effectivement. On a donc

$$(40)\qquad \frac{d\Phi_M^A}{ds} = \frac{d\Phi_B^M}{ds} = 0.$$

En écrivant que ces conditions restent à leur tour vérifiées lorsque le contour se déforme, on n'obtient cette fois aucune nouvelle condition imposée à la fonction Φ_B^A. En effet, si elles sont vérifiées initialement, il résulte de la formule (39) et de la formule analogue relative à Φ_B^M qu'elles restent vérifiées. Comme la condition d'intégrabilité (33) est une conséquence de ces formules, cette condition reste vérifiée. Par suite, *à toute détermination initiale de* Φ_B^A *ayant même singularité que la fonction de Green et vérifiant les conditions* (40) *correspond une solution de l'équation* (30).

Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une solution sont ainsi beaucoup moins restrictives dans le cas singulier que dans le cas régulier.

Cela était d'ailleurs à prévoir. Si nous remplaçons la région intérieure à C par la région comprise entre C et un autre contour C′, nous obtenons une autre fonction de Green, ayant dans le voisinage de C la même singularité que g_B^A, et vérifiant évidemment l'équation (30) lorsque C se déforme, C′ restant fixe. Toutes ces fonctions, dont la forme dépend ainsi d'une ligne C′, sont donc des solutions du problème que nous venons de traiter, et l'on devait s'attendre à trouver des solutions ayant un assez grand degré de généralité.

Toutefois, on ne pouvait pas prévoir que le problème traité ne conduirait à aucune autre condition que les conditions (40). Si l'on remplace la fonction de Green par la fonction de Neumann, on est conduit à une équation analogue à l'équation (30); la recherche des solutions de cette équation ayant même singularité que la fonction de Neumann conduit à des conditions analogues aux conditions (40), mais en outre, à la condition beaucoup plus restrictive que ces solutions soient des fonctions harmoniques des points A et B [1]. Dans le problème relatif à l'équation (30), on aurait pu s'attendre à la même restriction, puisque les solutions dont nous venons de montrer *a priori* l'existence la vérifient; mais nous avons vu qu'elle ne se présentait pas.

---

[1] *Voir* ma Thèse, Chapitre III.

CHAPITRE III.

TRANSFORMATIONS ET APPLICATIONS DE L'ÉQUATION AUX DÉRIVÉES FONCTIONNELLES DE LA FONCTION DE GREEN.

SOMMAIRE : *L'équation de M. Hadamard :* L'équation de M. Hadamard et la fonction de Green. — L'équation de M. Hadamard et la fonction de Green d'ordre 2. — L'équation de M. Hadamard et la fonction $\mathcal{G}_b^a$ sur le contour. — *Applications :* Les inégalités de M. Hadamard. — La recherche des solutions homogènes. — Étude du cas du cercle. — Extension au cas de l'espace.

L'ÉQUATION DE M. HADAMARD.

27. L'équation de M. Hadamard et la fonction de Green. — L'équation aux dérivées fonctionnelles de M. Hadamard est l'équation

$$(1) \qquad \delta \Psi_B^A = \int_C \Psi_M^A \Psi_B^M \, \delta n \, ds,$$

déjà considérée n° 12. Elle est complètement intégrable, non seulement, comme nous l'avons vu, dans le champ des fonctions symétriques, mais dans le champ des fonctions quelconques, étant exclues seulement les singularités pour lesquelles la formule (1) cesse d'avoir un sens pour les points du contour.

Étant donné le rôle joué dans la théorie de la fonction de Green par les dérivées normales, fonctions d'un point et d'une direction, nous considérerons non seulement des fonctions de deux points, mais des fonctions $\Psi(A, \theta_A; B, \theta_B)$ de deux points A et B et de deux directions données en A et B et définies par des angles θ_A et θ_B. La direction de la normale intérieure au contour C en M sera définie par l'angle θ. L'équation

$$(2) \qquad \delta \Psi(A, \theta_A; B, \theta_B) = \int_C \Psi(A, \theta_A; M, \theta) \Psi(M, \theta; B, \theta_B) \, \delta n \, ds$$

est analogue à l'équation (1), se réduisant à elle lorsque la fonction Ψ ne dépend pas de θ_A et θ_B.

Nous désignerons par $\frac{d}{dn_A}$ la dérivée d'une fonction suivant la direction définie en A par l'angle θ_A.

Appelons Φ_B^A une solution de l'équation aux dérivées fonctionnelles de la fonction de Green

$$(3) \qquad \delta\Phi_B^A = -\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{d\Phi_M^A}{dn}\frac{d\Phi_B^M}{dn}\delta n\, ds.$$

De cette équation résulte que

$$\delta\frac{d^2\Phi_A^B}{dn_A\, dn_B} = -\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{d^2\Phi_M^A}{dn_A\, dn}\frac{d^2\Phi_B^M}{dn\, dn_B}\delta n\, ds.$$

La fonction

$$(4) \qquad -\frac{1}{2\pi}\frac{d^2\Phi_B^A}{dn_A\, dn_B}$$

est une solution de l'équation (2). En particulier, si Φ_B^A est la fonction de Green g_B^A, la fonction

$$(5) \qquad -\frac{1}{2\pi}\frac{d^2 g_B^A}{dn_A\, dn_B},$$

qui se réduit sur le contour à $-\frac{1}{2\pi}\mathcal{G}_b^a$, est une solution de cette équation.

Si, au lieu de considérer une déformation quelconque du contour C, nous considérons une famille de contour bien déterminée, se déformant depuis un contour intérieur C_0 jusqu'à un contour extérieur C_1 de manière qu'un contour C et un seul passe par tout point A de la région comprise entre C_0 et C_1, nous pouvons supposer que l'on ait choisi pour θ_A l'angle définissant la direction de la normale intérieure à ce contour. Cet angle apparaît comme une fonction du point A, et l'expression (4) apparaît comme une fonction bien déterminée des points A et B. Cette fonction vérifie l'équation (1) pour la déformation considérée du contour C, ou bien, si l'on particularise les points A et B, pour toute déformation laissant ces points intérieurs au contour. Mais si ces points arrivent à être sur le contour, il est essentiel que le contour y soit normal aux directions correspondant aux angles choisis θ_A et θ_B.

28. L'équation de M. Hadamard et la fonction de Green d'ordre 2. — Des circonstances analogues se présentent avec la fonction de Green d'ordre 2. Cette fonction, que nous désignerons par G_B^A, intervient dans le problème qui consiste à déterminer, à l'intérieur d'un contour C, une fonction *biharmonique*, c'est-à-dire vérifiant l'équation

$$\Delta\Delta u = 0,$$

connaissant ses valeurs et celles de sa dérivée normale sur le contour C. La fonction G_B^A est définie comme une fonction du point A, s'annulant sur le contour ainsi que sa dérivée normale, et étant la somme de $r^2 \log\frac{1}{r}$ et d'une fonction biharmonique et régulière à l'intérieur de C. C'est aussi une fonction symétrique des points A et B.

Sa dérivée normale étant nulle, c'est la dérivée seconde $\frac{d^2 G_M^A}{dn^2}$ qui joue le rôle joué par la dérivée première dans l'étude de la fonction de Green d'ordre 1. Ainsi la variation de G_B^A est donnée par la formule

$$\delta G_B^A = \frac{1}{8\pi}\int_C \frac{d^2 G_M^A}{dn^2}\frac{d^2 G_B^M}{dn^2}\delta n\, ds, \tag{6}$$

et la fonction

$$\frac{1}{8\pi}\frac{d^4 G_B^A}{dn_A^2\, dn_B^2}$$

est, par suite, une nouvelle solution de l'équation (2).

Mais on peut ici arriver à un résultat un peu plus simple. On a, en effet,

$$\Delta_M G_M^A = \frac{d^2 G_M^A}{dn^2} + \frac{d^2 G_M^A}{ds^2} - k\frac{dG_M^A}{dn} = \frac{d^2 G_M^A}{dn^2},$$

Δ_M désignant l'opération Δ effectuée en considérant G_M^A comme fonction de M. La formule (6) peut alors s'écrire

$$\delta G_B^A = \frac{1}{8\pi}\int_C \Delta_M G_M^A \Delta_M G_B^M\, \delta n\, \delta s,$$

et la fonction

$$\frac{1}{8\pi}\Delta_A \Delta_B G_B^A,$$

qui ne dépend plus du choix des directions considérées en A et B, est une solution de l'équation de M. Hadamard.

29. L'équation de M. Hadamard et la fonction $\mathcal{G}_b^a$ sur le contour. — L'équation (1) est plus simple que l'équation (3) parce qu'elle permet de définir la variation de la fonction inconnue sans faire intervenir les dérivées de cette fonction par rapport aux coordonnées des points A et B. Mais si l'on veut ramener l'équation (3) à la forme (1), on ne le peut pas, et l'on est conduit, d'après ce qui précède, à se donner arbitrairement en A et B des directions définies par les angles θ_A et θ_B.

Un moyen d'éviter cette complication est de ne considérer les valeurs des expressions (4) ou (5) que pour les points du contour. Ces expressions ont alors un sens bien défini; nous avons déjà vu l'intérêt qui s'attache à ces valeurs. D'une part, la connaissance de la fonction $\mathcal{G}_b^a$ à laquelle se réduit, à un facteur constant près, l'expression (5) sur le contour suffit pour résoudre le problème de Dirichlet. D'autre part, la variation première de $\frac{dg_M^A}{dn}$ et, par suite, la variation seconde de g_B^A introduisent cette fonction, dont la singularité, lorsque les points a et b sont voisins, est la principale cause de difficulté dans l'étude de l'équation (3). On mettra donc mieux en évidence le caractère de cette difficulté en faisant dépendre l'étude de g_B^A de celle de $\mathcal{G}_b^a$.

Les points a et b devant rester sur le contour, nous devons considérer la variation $\delta_1 \mathcal{G}_b^a$ et non la variation $\delta \mathcal{G}_b^a$. D'après le n° 22, on a

$$(7)\qquad \delta_1 \mathcal{G}_b^a = \mathcal{G}_b^a (k_a\,\delta n_a + k_b\,\delta n_b) - \frac{1}{2\pi}\,\text{v. p.}\int_C \left(\mathcal{G}_M^a \mathcal{G}_b^M\,\delta n - 2\mathcal{G}_b^a\,\delta n_a \frac{d^2 \log \frac{1}{\rho_a}}{dn\,dn_a} - 2\mathcal{G}_b^a\,\delta n_b \frac{d^2 \log \frac{1}{\rho_b}}{dn\,dn_b} \right) ds.$$

La fonction $\mathcal{G}_b^a$ est donc une solution de l'équation

$$(8)\qquad \delta_1 \Psi_b^a = \Psi_b^a (k_a\,\delta n_a + k_b\,\delta n_b) - \frac{1}{2\pi}\,\text{v. p.}\int_C \left(\Psi_M^a \Psi_b^M\,\delta n - 2\Psi_b^a\,\delta n_a \frac{d^2 \log \frac{1}{\rho_a}}{dn\,dn_a} - 2\Psi_b^a\,\delta n_b \frac{d^2 \log \frac{1}{\rho_b}}{dn\,dn_b} \right) ds,$$

qui n'est au fond qu'une forme modifiée de l'équation de M. Hadamard, écrite de manière à ne faire intervenir que les valeurs de Ψ_b^a sur le contour et à préciser le sens qu'il faut donner au second membre pour les fonctions ayant même singularité que $\mathcal{G}_b^a$.

En posant

$$\Psi_b^a = \mathcal{G}_b^a + \mathcal{H}_b^a, \tag{9}$$

$\mathcal{H}_b^a$ étant alors une fonction holomorphe, et en tenant compte de ce que, d'après le n° 22, nous pouvons, dans les formules (7) et (8), remplacer les facteurs logarithmiques par $\frac{1}{2}\mathcal{G}_M^a$ et $\frac{1}{2}\mathcal{G}_b^M$, on voit que la transformée de l'équation (8) par la formule (9) s'écrit

$$\begin{aligned}\delta_1 \mathcal{H}_b^a = \mathcal{H}_b^a(k_a\,\delta n_a + k_b\,\delta n_b) - \frac{1}{2\pi}\int_C \mathcal{H}_M^a \mathcal{H}_b^M\,\delta n\,ds \\ - \frac{1}{2\pi}\,\text{v. p.}\int_C \left[\mathcal{G}_M^a(\mathcal{H}_b^M\,\delta n - \mathcal{H}_b^a\,\delta n_a) + \mathcal{G}_b^M(\mathcal{H}_M^a\,\delta n - \mathcal{H}_b^a\,\delta n_b)\right] ds.\end{aligned} \tag{10}$$

30. Nous avons obtenu l'équation (8) en formant la variation de $\mathcal{G}_b^a$. Nous allons maintenant montrer le lien qui existe entre les autres solutions de cette équation et l'équation (3).

Soit Φ_B^A une solution de l'équation (3). Supposons :

1° Qu'elle soit de la forme

$$\Phi_B^A = g_B^A + h_B^A,$$

la fonction h_B^A étant holomorphe lorsque les points A et B sont tous deux voisins du contour;

2° Qu'elle soit une fonction harmonique de chacun des points A et B;

3° Qu'elle s'annule lorsque l'un ou l'autre de ces points vient sur le contour.

Je dis que, dans ces conditions, la fonction

$$\Psi_b^a = \frac{d^2\Phi_b^a}{dn_a\,dn_b} \tag{11}$$

est une solution de l'équation (8).

Il résulte, en effet, de la première de ces hypothèses que $\delta\Psi_b^a$ est représenté par l'intégrale du second membre de (8), et des deux

autres que

$$\delta_1 \Psi_b^a = \delta \Psi_b^a + \Psi_b^a (k_a \, \delta n_a + k_b \, \delta n_b).$$

De ce résultat, on peut déduire que l'équation (8) est complètement intégrable dans le champ des fonctions ayant même singularité que $\mathcal{G}_b^a$, c'est-à-dire que l'équation (10) est complètement intégrable dans le champ des fonctions régulières.

En effet, nous pouvons choisir arbitrairement pour un contour C la fonction Ψ_b^a ayant même singularité que $\mathcal{G}_b^a$. La formule (11) détermine alors sans ambiguïté une fonction Φ_B^A vérifiant les trois conditions énoncées au début de ce paragraphe (on le voit en déterminant $\frac{d\Phi_B^a}{dn_a}$ comme fonction harmonique de B connue sur le contour ainsi que sa dérivée normale, puis de même Φ_B^A comme fonction harmonique de A, et vérifiant ensuite que cette fonction vérifie les trois conditions énoncées). De la première et la troisième condition résulte, d'après le n° 26, l'existence d'une solution de l'équation (3) correspondant à la valeur initiale ainsi définie. On en déduit alors, par la formule (11), la solution de l'équation (8) correspondant à la valeur initiale choisie pour Ψ_b^a. Le résultat énoncé concernant l'intégrabilité des équations (8) et (10) est donc établi.

On pourrait, bien entendu, le démontrer directement en utilisant les résultats établis n° 77 de la première Partie sur les fonctions dépendant d'un contour et d'un point de ce contour.

APPLICATIONS.

31. **Les inégalités de M. Hadamard.** — M. Hadamard a déduit des équations (3) et (6) des inégalités importantes concernant les fonctions de Green.

La fonction de Green g_B^A est toujours positive. Cela résulte de ce qu'une fonction harmonique régulière ne peut avoir ni minimum ni maximum. La fonction de Green, fonction harmonique de A, nulle sur le contour C, et positive et très grande sur un petit cercle Γ entourant B, est toujours comprise, dans la région annulaire située entre C et Γ, entre zéro et son maximum sur Γ.

L'équation (3), vérifiée pour la fonction de Green, montre alors

que

$$\delta g_B^A > 0, \tag{12}$$

pour toute déformation telle que δn soit partout négatif ou nul. En d'autres termes, la valeur de la fonction de Green pour deux points fixes A et B augmente lorsqu'on remplace un contour enveloppé par un contour enveloppant.

Lorsque A et B sont confondus, la fonction g_B^A n'a pas de sens, mais la fonction

$$g_B^A + \log r,$$

qui a même variation qu'elle, a une valeur bien déterminée $h(A)$ [1]. L'équation (3) donne alors, en tenant compte des inégalités de Schwarz,

$$(\delta g_B^A)^2 < \delta h(A)\,\delta h(B). \tag{13}$$

32. La fonction de Green d'ordre 2, G_B^A, est vraisemblablement toujours négative pour un contour simple. Mais cela n'a pas été démontré. On peut alors seulement déduire de la formule (6), G_B^A ayant un sens lorsque A et B sont confondus, que, si δn est partout négatif ou nul, on a

$$\delta G_A^A < 0,$$
$$(\delta G_B^A)^2 < \delta G_A^A\,\delta G_B^B.$$

De la première de ces inégalités, et du fait que G_A^A est négatif pour un cercle très petit entourant le point A, résulte que cette fonction est négative pour un contour quelconque.

33. Malgré la brièveté des indications que nous venons de donner, le lecteur peut se rendre compte de la fécondité de la méthode employée.

Toutes les fois que l'on sait résoudre un problème, pour certaines valeurs particulières des données, les méthodes du calcul différentiel permettent de le résoudre d'une manière approchée pour des valeurs

---

[1] D'après la définition de la fonction de Green, $h(A)$ est la valeur *moyenne* du logarithme de la distance d'un point du contour au point A, la moyenne étant calculée en donnant à chaque élément d'arc un poids égal à l'angle sous lequel il est vu de A

des données voisines des valeurs particulières considérées d'abord. Si les données comprennent une fonction arbitraire ou une ligne, la méthode consiste à former la variation de la fonctionnelle étudiée en fonction des variations des données. On peut ainsi étudier la fonction de Green pour des contours voisins de la circonférence. On peut étudier ses singularités en un point singulier M d'un contour C en considérant d'abord des contours voisins de C et réguliers dans le voisinage de M.

On peut naturellement appliquer des méthodes analogues à des problèmes beaucoup plus généraux que celui de la détermination de la fonction de Green relative à l'équation de Laplace et au problème de Dirichlet.

34. La recherche des solutions homogènes. — A un point de vue tout différent, on peut utiliser l'équation aux dérivées fonctionnelles (30) du Chapitre précédent à l'étude de la fonction de Green. Nous avons vu que les conditions d'intégrabilité de cette équation, très peu restrictives, ne donnaient aucun renseignement nouveau sur cette fonction; l'équation (30) ne peut donc conduire, si on la considère seule, à la détermination de la fonction de Green, que si l'on suppose sa valeur connue pour un contour particulier.

Il n'en est pas de même, si l'on combine les renseignements que peut donner l'équation (30) avec les propriétés élémentaires de la fonction de Green, notamment celle relative à sa singularité, celle d'être harmonique et celle d'être homogène et de degré zéro.

Lorsqu'on remplace la figure formée par le contour C et les deux points A et B par une figure semblable et très peu différente, la fonction de Green ne doit pas changer, d'après la propriété d'homogénéité. On a donc

$$\delta g_B^A + \frac{\partial g_B^A}{\partial x_A}\delta x_A + \frac{\partial g_B^A}{\partial y_A}\delta y_A + \frac{\partial g_B^A}{\partial x_B}\delta x_B + \frac{\partial g_B^A}{\partial y_B}\delta y_B = 0,$$

x_A, y_A et x_B, y_B désignant les coordonnées de A et B, et δx_A, δy_A, δx_B, δy_B, leurs variations pour la déformation considérée. En remplaçant, d'autre part, δg_B^A par sa valeur, on voit que la fonction de Green est solution de l'équation

$$\text{(E)}\quad \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{d\Phi_M^A}{dn}\frac{d\Phi_B^M}{dn}\delta n\, ds = \frac{\partial\Phi_B^A}{\partial x_A}\delta x_A + \frac{\partial\Phi_B^A}{\partial y_A}\delta y_A + \frac{\partial\Phi_B^A}{\partial x_B}\delta x_B + \frac{\partial\Phi_B^A}{\partial y_B}\delta y_B.$$

Comme on peut considérer dans le plan quatre déformations infinitésimales indépendantes les unes des autres et remplaçant la figure par une figure semblable (par exemple une translation parallèle à Ox, une translation parallèle à Oy, une rotation et une homothétie), on a, en réalité, *quatre équations intégro-différentielles* vérifiées par la fonction de Green.

La question se pose naturellement de savoir si ces équations suffisent pour déterminer la fonction de Green, ou si, du moins, ajoutées à certaines propriétés élémentaires de ces fonctions, elles en facilitent la détermination.

35. Remarquons d'abord que la réponse à la question posée, non au point de vue des calculs pratiques à effectuer pour la résolution des équations (E), mais au point de vue de la possibilité théorique de cette résolution, est indépendante du contour considéré.

En effet, le problème qui nous a conduit aux équations (E) consiste à trouver des fonctionnelles Φ_B^A vérifiant l'équation aux dérivées fonctionnelles de la fonction de Green et ayant la même propriété d'homogénéité que cette fonction. Les équations (E) définissent les valeurs initiales de ces fonctionnelles pour un contour particulier. Quel que soit le contour considéré, il est évident qu'on doit trouver les mêmes fonctionnelles, et par suite, le même nombre de solutions des équations (E).

Du moins ce résultat est très vraisemblablement exact. Pour le démontrer rigoureusement, il faudrait écarter l'hypothèse d'une fonctionnelle vérifiant les conditions indiquées, mais définie dans un champ fonctionnel ne comprenant qu'une partie des contours plans C.

Les mêmes remarques s'appliquent si, au lieu de chercher à définir la fonction Φ_B^A par les équations (E), nous utilisons les propriétés suivantes :

1° Avoir même partie singulière que g_B^A dans le voisinage du contour, c'est-à-dire être la somme de g_B^A et d'une fonction holomorphe lorsque les points A et B sont suffisamment voisins du contour;

2° Vérifier sur le contour les conditions

$$\frac{d}{ds}\Phi_M^A = \frac{d}{ds}\Phi_B^M = 0; \tag{14}$$

3° Être dans le voisinage du contour une fonction harmonique de chacun des points A et B;

4° Être une fonction symétrique des points A et B.

En effet, ces conditions, supposées vérifiées pour un contour initial, le restent quand le contour se déforme. Si donc nous montrons que pour un contour particulier, par exemple un contour circulaire, ces conditions, jointes aux équations (E), suffisent à déterminer la fonction de Green, il en sera vraisemblablement ainsi pour un contour quelconque (¹).

36. Nous avons déjà remarqué le rôle que jouent les valeurs des dérivées de la fonction de Green sur le contour, et en particulier de la première dérivée qui ne s'annule pas, que nous avons désignée par $\mathcal{G}_b^a$.

La forme des équations (E), faisant intervenir les valeurs de Φ_B^A sur le contour, conduit à représenter cette fonction par un développement en série de Taylor dans le voisinage du contour et à étudier les conditions imposées aux dérivées successives $\frac{d^{h+k}\Phi_b^a}{dn_a^h\, dn_b^k}$. Il nous suffit d'étudier les conditions imposées à $\Psi_b^a = \frac{d^2\Phi_b^a}{dn_a\, dn_b}$; si, en effet, nous arrivons à montrer que cette fonction est déterminée, les autres dérivées sont déterminées par les conditions 2° et 3° du n° 35; il n'est

(¹) La difficulté d'une démonstration rigoureuse provient de ce que la propriété 1°, vraie pour un contour initial C_0, l'est seulement pour les contours assez peu différents de C_0. Si l'on pose $\Phi_B^A = g_B^A + h_B^A$, la formule

$$\delta h_B^A = -\frac{1}{2\pi}\int_C \left(\frac{dg_M^A}{dn}\frac{dh_B^M}{dn} + \frac{dh_M^A}{dn}\frac{dg_B^M}{dn} + \frac{dh_M^A}{dn}\frac{dh_B^M}{dn}\right)\delta n\, ds$$

montre que δh_B^A est holomorphe si h_B^A l'est, et l'on peut, en formant h_B^A par des approximations successives, montrer rigoureusement que h_B^A reste holomorphe pour les contours très peu différents de C_0. Mais il peut arriver que h_B^A cesse d'être holomorphe dans le voisinage du contour pour des contours C assez différents de C_0; il s'agirait de montrer que cette circonstance ne peut pas se produire pour des fonctions vérifiant les équations (E).

La première partie de la démonstration est exposée au n° 31 de ma Thèse. Je ne l'ai pas reproduite, parce que, ayant remarqué que la démonstration que j'avais donnée pouvait se simplifier, je n'ai pu encore arriver à la mettre sous une forme suffisamment simple.

d'ailleurs pas difficile, en faisant abstraction de ces conditions, de les déterminer par les équations (E). De toute façon, pour montrer que le problème posé au numéro précédent détermine bien (à une constante près) toutes les dérivées successives de Φ_B^A, il suffit de montrer qu'il détermine bien Ψ_b^a.

Les conditions imposées à Ψ_b^a peuvent, comme nous venons de l'indiquer, se déduire des équations (E). Il est aussi simple de les déduire du fait que Ψ_b^a vérifie l'équation (8) et est homogène de degré -2. Dans une déformation remplaçant la figure par une figure semblable, les points a et b ont des déplacements normaux δn_a et δn_b, et des déplacements tangentiels δs_a et δs_b. La variation de Ψ_b^a due aux déplacements normaux, et celle due aux rotations des tangentes [qui est d'ailleurs nulle en vertu des conditions (14)], sont contenues dans l'expression de $\delta_1 \Psi_b^a$ donnée par la formule (8). Il vient donc

$$\text{(F)} \qquad \delta_1 \Psi_b^a + \frac{\partial \Psi_b^a}{\partial s_a} \delta s_a + \frac{\partial \Psi_b^a}{\partial s_b} \delta s_b + 2 \Psi_b^a \frac{\delta l}{l} = 0,$$

δl désignant la variation d'une longueur l liée à la figure; en d'autres termes, $1 + \frac{\delta l}{l}$ désigne le rapport de similitude de la figure déformée et de la figure primitive.

Les équations (F) constituent quatre *équations intégrales* [1], vérifiées par la fonction Ψ_b^a. Il faut remarquer que pour arriver à ce résultat l'hypothèse que Φ_B^A soit harmonique est essentielle. En effet, sans cette hypothèse, les coefficients de δn_A et δn_B dans la formule (8) ne seraient pas $k_a \Psi_b^a$ et $k_b \Psi_b^a$, mais

$$\frac{d^3 \Phi_b^a}{dn_a^2\, dn_b} \quad \text{et} \quad \frac{d^3 \Phi_b^a}{dn_a\, dn_b^2}.$$

Ce seraient deux fonctions nouvelles, distinctes de Ψ_b^a, qu'il faudrait éliminer. Les deux équations résultant de cette élimination

---

[1] Malgré la présence de signes de dérivation, elles se distinguent des équations *intégro-différentielles* qui comprennent une intégration par rapport à une variable et une dérivation par rapport à une autre; tel était le cas pour les équations (E), contenant une intégration le long du contour C et une dérivation normale. Toutefois, elles se distinguent nettement des équations intégrales ordinaires par la présence sous le signe d'intégration des valeurs Ψ_M^a et Ψ_b^M de la fonction pour deux systèmes différents de valeurs des variables.

peuvent s'écrire directement en formant les équations (F) relatives à des déformations qui annulent δn_a et δn_b, soit par exemple :

1° Une homothétie par rapport au point de concours des tangentes en a et en b;

2° Une rotation par rapport au point de concours des normales.

Mais ces deux équations ne suffiraient pas à déterminer Ψ_b^a, tandis que nous allons voir, par l'étude du cas du cercle, que les quatre équations (F), jointes à la condition que Ψ_b^a ait pour partie infinie celle de $\mathcal{G}_b^a$ et soit symétrique en a et b, suffisent (¹).

37. **Étude du cas du cercle.** — Dans le cas d'un cercle de rayon 1, l'équation (F) relative à une rotation montre que Ψ_b^a se réduit à une fonction $\psi(\theta)$ de l'arc θ qui sépare les points a et b. En raison de la propriété de symétrie de Ψ_b^a, cette fonction est paire.

A cause de la symétrie de la figure par rapport au diamètre perpendiculaire à ab, l'équation relative à une translation parallèle à ab est identiquement vérifiée, et il reste à écrire les équations relatives à une translation perpendiculaire à ab et à une homothétie. Nous considérerons, ce qui revient au même, les équations relatives à deux homothéties, l'une par rapport au point de concours des tangentes en a et b, l'autre par rapport au centre du cercle.

Pour écrire ces équations, nous ne prendrons pas $\delta_1 \Psi_b^a$ sous la forme (8), mais nous utiliserons les formules

$$\begin{aligned}\delta_1 \Psi_b^a &= \delta \Psi_b^a + k_a \Psi_b^a \delta n_a + k_b \Psi_b^a \delta n_b,\\ &= \delta \Psi_b^a + \Psi_b^a (\delta n_a + \delta n_b);\end{aligned}$$

$$\delta \Psi_b^a = \lim_{A,B \to a,b} \delta \Psi_B^A = -\frac{1}{2\pi} \lim_{A,B \to a,b} \int_C \Psi_M^A \Psi_B^M \delta n \, ds.$$

(¹) On peut trouver qu'il n'y a pas très grand intérêt à arriver à montrer que la fonction de Green est déterminée si l'on utilise les équations (E), et, de plus, les conditions du n° 35, qui seraient *presque* suffisantes à elles seules. Aussi j'insiste sur le caractère essentiel de la méthode, qui est de ne pas tenir compte de l'hypothèse que la fonction de Green est harmonique *dans toute la région intérieure au contour*. Cette hypothèse est nécessaire dans la définition habituelle. Au contraire, nous arrivons à caractériser la fonction de Green par un ensemble de propriétés ne faisant intervenir que ses valeurs dans le voisinage du contour.

D'ailleurs, pratiquement, il ne peut y avoir intérêt qu'à appliquer cette méthode à la recherche de $\mathcal{G}_b^a$. C'est par la formule de Green qu'on aura ensuite aussi simplement que possible $\frac{dg_B^a}{dn_a}$, puis g_B^A.

Cette dernière formule a l'inconvénient de faire intervenir de nouveau les valeurs de Ψ_M^A et Ψ_B^M pour des points qui ne sont pas sur le contour (valeurs bien définies si l'on prend la direction du rayon comme étant la direction normale). Mais elle est préférable pour la suite.

Désignant par r la distance de A au centre O du cercle et a l'angle des rayons OA et OM, Ψ_M^A est de la forme $\psi(r, \alpha)$, la fonction $\psi(r, \alpha)$ se réduisant à $\psi(\alpha)$ pour $r = 1$; les formules précédentes donnent

$$\delta_1 \psi(\theta) = \psi(\theta)(\delta n_a + \delta n_b) - \frac{1}{2\pi} \lim_{r=1} \int_0^{2\pi} \psi(r, \alpha)\psi(r, \theta - \alpha)\,\delta n\, d\alpha.$$

Par un calcul facile, on trouve pour les équations (F) qu'il s'agit de former

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} &\psi(\theta)\cos\frac{\theta}{2} + \psi'(\theta)\sin\frac{\theta}{2} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi}\lim_{r=1}\int_0^{2\pi} \psi(r, \alpha)\psi(r, \theta - \alpha)\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\theta - \alpha}{2}\, d\alpha = 0, \\ &\qquad \lim_{r=1}\int_0^{2\pi} \psi(r, \alpha)\psi(r, \theta - \alpha)\, d\alpha = 0. \end{aligned} \right.$$

38. Pour donner une idée de la méthode par laquelle on peut résoudre ces équations, commençons par faire abstraction du fait que $\psi(\theta)$ devienne infini pour $\theta = 0$. Le passage à la limite indiqué s'effectue alors sans difficulté et la deuxième équation s'écrit

$$\int_0^{2\pi} \psi(\alpha)\psi(\theta - \alpha)\, d\alpha = 0.$$

Cherchant à représenter $\psi(\theta)$ par une série

$$(16)\qquad \psi(\theta) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\theta + \ldots + a_n\cos n\theta + \ldots,$$

on trouve sans peine

$$a_0^2 = a_1^2 = \ldots = a_n^2 = \ldots = 0.$$

La fonction $\psi(\theta)$, dans les conditions considérées, est donc identiquement nulle.

39. En réalité, nous avons à rechercher des solutions non régulières des équations (15). Mais ces fonctions sont la limite de fonc-

tions $\psi(\theta)$ régulières et développables en série de Fourier pour $r < 1$; pour $r = 1$, ces développements tendent vers un développement divergent, que nous pouvons considérer comme représentant $\psi(\theta)$, et à l'aide duquel nous pouvons effectuer les calculs à peu de chose près comme s'il était convergent.

La seule précaution à prendre provient de ce qu'un tel développement peut représenter zéro sans être identiquement nul. Tenant compte de ce que les fonctions considérées, ayant la même singularité que la fonction de Green et ses dérivées, n'ont pas d'autre point singulier que le point $r = 1$, $\theta = 0$, et de ce que dans le voisinage de ce point, leur produit par ρ^j reste fini (ρ désignant la distance au point singulier et j un nombre entier positif convenable), il est facile de déterminer tous les développements

$$\psi_0(\theta) = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{ni\theta},$$

ainsi susceptibles de représenter zéro.

Posant

$$D_0 f(n) = f(n), \qquad D_{h+1} f(n) = D_h f(n+1) - D_h f(n),$$

et remarquant que $D_j e^{-ni\theta}$ a une racine d'ordre j pour $\theta = 0$, on a

$$\pi D_j(a_n) = \lim_{r=1} \int_0^{2\pi} \psi_0(r, \theta) D_j e^{-ni\theta} d\theta = 0,$$

le passage à la limite s'effectuant sans difficulté, et $\psi_0(1, \theta)$ étant nul. Donc a_n est un polynome en n, de degré $j - 1$ au plus, et il vient

$$\psi_0(\theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_1^{\infty} (c_0 \cos n\theta + ic_1 n \sin n\theta + c_2 n^2 \cos n\theta + \ldots),$$

le dernier terme étant un terme en n^{j-1}. Si $j = 3$ et que l'on ne considère que des fonctions paires, on a nécessairement

$$\psi_0(\theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_1^{\infty} (c_0 + c_2 n^2) \cos n\theta. \tag{17}$$

Revenons maintenant aux équations (15). Ces équations sont la

limite d'équations faciles à écrire en considérant deux points A et B intérieurs et introduisant des fonctions

$$\psi(r, \theta) = \Psi_B^a \qquad \text{et} \qquad \psi_1(r, \theta) = \Psi_B^A,$$

les deux points A et B étant tous deux, pour simplifier, supposés à la même distance r du centre. Ces fonctions $\psi(r, \theta)$ et $\psi_1(r, \theta)$ étant développables en séries de Fourier, on peut calculer les développements des premiers membres, puis passer à la limite. Cela revient au même que de remplacer $\psi(\theta)$ dans les équations (15) par un développement divergent de la forme (16) et faire le calcul comme s'il était convergent, avec cette différence que les équations complètes, écrites pour des points A et B intérieurs, introduisent peut-être des termes qui s'annulent à la limite sans que leurs développements s'annulent. Mais toutes les fonctions introduites, qui sont des dérivées d'ordre 3 au plus de la fonction de Green, n'ont pas d'autre point singulier que le point $\theta = 0$, et leur produit par ρ^3 reste fini. Les développements de ces termes sont donc de la forme (17). En définitive, on doit calculer les développements des premiers membres des équations (15) comme si le développement (16) était convergent, et identifier les développements obtenus non à zéro, mais à des développements de la forme (17).

Le calcul n'est pas difficile. On trouve pour $\psi(\theta)$ un développement de la forme

$$c(\cos\theta + 2\cos 2\theta + \ldots + n\cos n\theta + \ldots). \tag{18}$$

D'autre part, nous cherchons les fonctions $\psi(\theta)$ ayant même partie infinie que

$$\mathcal{G}_b^a = \frac{d^2 g_b^a}{dn_a\, dn_b} = \frac{1}{\sin^2\dfrac{\theta}{2}}.$$

Il est facile d'obtenir le développement de cette fonction au point de vue qui nous intéresse. On a, en effet, pour un point B intérieur,

$$\frac{dg_B^a}{dn_a} = \frac{2(1 - r\cos\theta)}{1 - 2r\cos\theta + r^2} - 1 = 2\Re\frac{1}{1 - re^{i\theta}} - 1$$
$$= 2\left(\frac{1}{2} + r\cos\theta + r^2\cos 2\theta + \ldots\right),$$

$\mathcal{R}$ désignant une partie réelle [1], et

$$\frac{d^2 g_B^a}{dn_a\, dn_B} = -2(\cos\theta + 2r\cos 2\theta + \ldots + nr^{n-1}\cos n\theta + \ldots),$$

d'où, pour le développement divergent qui représente $\mathcal{G}_b^a$,

$$-2(\cos\theta + 2\cos 2\theta + \ldots + n\cos n\theta + \ldots).$$

Le développement (18), devant être la somme de $\mathcal{G}_b^a$ et d'un développement convergent, on a $c = -2$, et ce développement est parfaitement déterminé.

Les équations (E) ou (F), jointes aux propriétés connues de la fonction de Green dans le voisinage du contour, déterminent donc parfaitement $\mathcal{G}_b^a$, et par suite la fonction de Green, dans le cas du cercle, et par suite, très probablement, dans le cas d'un contour quelconque.

40. Extension au cas de l'espace. — Les résultats précédents, relatifs aux équations aux dérivées fonctionnelles en général, à celle de la fonction de Green en particulier, s'étendent aisément au cas de l'espace. Il en est de même de la réduction de cette équation à celle de M. Hadamard, du rôle joué par les valeurs sur le contour de la fonction $\mathcal{G}_b^a$, et de la mise en équations du problème de la recherche des solutions homogènes. De même, pour savoir si ce problème est déterminé, il suffit de le résoudre dans un cas particulier.

Il semble naturel de considérer le cas particulier de la sphère. Mais on obtient des résultats plus simples dans le cas du cylindre de révolution. Ils présentent en outre l'intérêt de conduire à la détermination de la fonction de Green dans un cas où elle n'est pas élémentaire.

Prenant l'axe du cylindre pour axe des z, et le point a dans le plan $z = 0$, $\mathcal{G}_b^a$ devient une fonction $\psi(\theta, z)$ qui joue le même rôle que la fonction $\psi(\theta)$ dans le cas du cercle. Il s'agit de savoir si elle est déterminée par les équations intégrales qui généralisent les équations (F).

---

[1] On remarque que ce développement est de la forme (17), avec $c_2 = 0$, ce qui était à prévoir, puisque la fonction considérée s'annule sur le contour et que son produit par ρ reste fini.

La généralisation naturelle de la méthode suivie dans le cas du cercle consiste à représenter la fonction ψ, considérée comme fonction de θ, par une série de Fourier, et considérée comme fonction de z, par une intégrale de Fourier, c'est-à-dire à poser

$$\psi(\theta, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos tz\, F(\theta, t)\, dt,$$

$$F(\theta, t) = \frac{1}{2} f_0(t) + \sum_1^{\infty} f_n(t) \cos n\theta,$$

les séries considérées pouvant d'ailleurs, comme dans le cas du cercle, être divergentes.

La transformation des équations intégrales du problème conduit à des équations de Riccati vérifiées par les fonctions $f_n(t)$ et à des conditions initiales définissant parfaitement ces fonctions. La fonction de Green en résulte [1].

41. La transformation faite sur $\psi(\theta, z)$ équivaut à une transformation analogue faite sur la fonction de Green. Si r_1 et r_2 sont les distances des points A et B à l'axe du cylindre, on peut poser

$$(19) \qquad g_B^A = g(r_1, r_2, \theta, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos tz\, \gamma(r_1, r_2, \theta, t)\, dt,$$

et l'on a évidemment

$$F(\theta, t) = \left[\frac{\partial^2 \gamma}{\partial r_1\, \partial r_2}\right]_{r_1 = r_2 = 1}.$$

La fonction γ, ainsi introduite par la transformation des équations par l'emploi d'une intégrale de Fourier, est une fonction de t, et des points A′ et B′, projections de A et B sur le plan $z = 0$. M. Bouligand a remarqué que cette fonction n'est autre que la fonction de Green relative au cercle, section du cylindre, et à l'équation

$$(20) \qquad \Delta u - t^2 u = 0$$

(le symbole Δ désignant $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; dans l'espace, appliqué à g_B^A, il désignera naturellement $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$).

---

[1] *Voir* Paul Lévy, *Sur la fonction de Green ordinaire et la fonction de Green d'ordre deux relatives au cylindre de révolution* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXXIV, 1912).

Remarquons, en effet, que, $u(x, y, t)$ vérifiant cette équation, en posant

$$v(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos tz\, u(x, y, t)\, dt,$$

on a

$$\Delta v = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos tz (\Delta u - t^2 u)\, dt = 0.$$

De même, si u s'annule sur le cercle et a la singularité voulue pour la fonction de Green dans le plan, v s'annule sur le cylindre et a la singularité voulue pour la fonction de Green dans l'espace. On voit donc bien que, en prenant pour u la fonction de Green γ relative au cercle et à l'équation (20), on trouve pour v la fonction g_B^A.

Cette remarque s'étend d'ailleurs au cas d'un cylindre quelconque. La détermination de la fonction g_B^A pour un cylindre se ramène par la formule (19) à la détermination de la fonction de Green relative à sa section droite et à l'équation (20). On ne doit pas s'étonner dès lors que cette transformation, qui ramène le cas du cylindre de révolution au cas simple du cercle, nous ait permis de déterminer la fonction de Green. Ce résultat aurait pu être obtenu sans le secours de l'analyse fonctionnelle.

42. Nous pouvons maintenant apprécier les résultats obtenus par la recherche des solutions homogènes.

En théorie, nous sommes en possession d'une méthode toute nouvelle pour la détermination de la fonction de Green.

En pratique, cette méthode nous conduit à des équations intégrales que nous ne savons résoudre que dans des cas particuliers, qui sont précisément des cas où la fonction de Green est élémentaire, ou du moins peut être obtenue sans le concours de l'analyse fonctionnelle.

Comme application de l'analyse fonctionnelle, le résultat est plutôt négatif. J'ai cru toutefois devoir l'indiquer, car il est possible qu'il suggère des applications plus fécondes [1].

---

[1] Ce Chapitre a été rédigé avant la publication des Notes de M. Julia dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (1921, 1er semestre). Ces Notes indiquent de nouvelles conséquences des équations aux dérivées fonctionnelles de M. Hadamard; je me contente de les signaler, ne pouvant, sans retarder la publication de cet Ouvrage, leur accorder la place qu'elles mériteraient.

CHAPITRE IV.

LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES FONCTIONNELLES PARTIELLES.

SOMMAIRE : Définition des équations aux dérivées fonctionnelles partielles. — La condition d'intégrabilité. — Définitions géométriques. — Le problème de Cauchy. — Calcul des éléments du second ordre. — Équations des caractéristiques. — Propriétés des caractéristiques. — Solution du problème de Cauchy. — Intégrabilité des équations des caractéristiques. — La notion d'enveloppe. — La notion d'intégrale complète. — Les équations linéaires. — Cas des fonctionnelles dépendant d'un contour plan C et d'une fonction $u(s)$.

43. Définition des équations aux dérivées fonctionnelles partielles. — Ces équations sont, par rapport à celles que nous venons d'étudier, ce que sont les équations aux dérivées partielles par rapport aux équations ordinaires.

Pour exposer la théorie de ces équations, nous nous contenterons de considérer le cas d'une fonctionnelle U dépendant de deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$, définies dans l'intervalle (0, 1). Sa variation est de la forme

$$(1) \qquad \delta U = \int_0^1 [U'_{x(t)}\,\delta x(t) + U'_{y(t)}\,\delta y(t)]\,dt.$$

Si les dérivées fonctionnelles U'_x et U'_y étaient données toutes les deux par des équations de la forme

$$U'_{x(\tau)} = \Phi_1 | [x(t), y(t) | U, \tau] |, \qquad U'_{y(\tau)} = \Phi_2 | [x(t), y(t) | U, \tau] |,$$

la formule (1) deviendrait une équation analogue à celles que nous venons d'étudier. Elle s'y ramènerait en considérant une fonction $X(t)$ égale à $x(2t)$ entre 0 et $\frac{1}{2}$ et à $y(2t-1)$ entre $\frac{1}{2}$ et 1; sa donnée équivaudrait à la donnée des deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$, et l'on aurait une dérivée fonctionnelle unique, U'_X, donnée en fonction

de $X(t)$, t et U, par une formule de la forme [1]

$$U'_{X(\tau)} = \Phi|[X(t)|U, \tau]|.$$

On a, au contraire, un type nouveau [2], si une seule des dérivées fonctionnelles est donnée, en fonction de l'autre, et naturellement toujours de $x(t)$, $y(t)$, t, U, c'est-à-dire si l'on a

$$(2) \qquad U'_{y(\tau)} = \Phi|[x(t), y(t), U'_{x(t)}|U, \tau]|.$$

Une telle équation est dite *équation aux dérivées fonctionnelles partielles* vérifiée par la fonctionnelle U [3].

Elle apparaît comme la généralisation, par le procédé du passage du fini à l'infini, d'un système de la forme

$$(3) \quad \left\{ \frac{\partial u}{\partial y_i} = \varphi_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) \right. \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

vérifié par une fonction u de $2n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Sa théorie est tout à fait analogue à celle d'un tel système [4].

44. La manière la plus simple de poser le problème de Cauchy pour une telle équation consiste à se donner U en fonction de $x(t)$, pour une détermination particulière $y_0(t)$ de $y(t)$. Si, à partir de

---

(1) Toutefois, si l'on précise la forme de la fonctionnelle F, introduite de cette manière, on remarque qu'il faut considérer comme naturel qu'elle dépende spécialement, non seulement de $x(\tau)$, mais aussi de $x\left(\tau \pm \frac{1}{2}\right)$. Ainsi, bien que nous soyons conduits à une équation rentrant dans le type général déjà étudié, on voit que ce nouveau point de vue peut conduire à considérer comme intéressants des cas qui auraient peu de chances de se présenter dans un problème n'introduisant dès le début qu'une seule fonction inconnue.

(2) Il peut d'ailleurs se rattacher au type étudié n° 6. *Voir* note 1 du n° 6.

(3) On pourrait donner des noms différents aux arguments des fonctions x et y. La théorie est aussi générale en leur donnant le même nom et se prête mieux aux applications les plus fréquentes dans lesquelles la signification du problème posé conduit à considérer x et y comme fonction d'une même variable; en général, $U'_{y(\tau)}$ dépendra spécialement des valeurs de U'_x, x et y pour $t = \tau$.

(4) *Voir* Paul Lévy, *Sur l'intégration des équations aux dérivées fonctionnelles partielles* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXXVII, 1914). On trouvera dans ce Mémoire, exposées successivement, les théories du système (3) et de l'équation (2), de manière à mettre cette analogie en évidence.

cette détermination initiale, $y(t)$ varie en fonction d'un paramètre λ, la formule (2) donne immédiatement la dérivée de U par rapport à λ, et permet le calcul des dérivées successives. On peut donc arriver à définir U pour une valeur quelconque de λ.

La démonstration rigoureuse de ce résultat résultera de ce que les équations du type (2) se ramènent à des équations aux dérivées fonctionnelles ordinaires pour lesquelles nous savons, dans certains cas, établir l'existence des solutions. Il y aurait tout de même intérêt à généraliser les théorèmes de Cauchy-Kowalevsky sur les équations aux dérivées partielles. En tout cas, ce travail est indispensable pour une étude complète des équations d'ordres supérieurs; il n'a pas encore été fait.

45. **La condition d'intégrabilité.** — Après avoir démontré, ou provisoirement admis, l'existence d'une solution lorsque $y(t)$ varie suivant une loi déterminée, il y a lieu de chercher si le résultat, pour une fonction donnée $Y(t)$, est indépendant des déterminations de $y(t)$ intermédiaires entre $y_0(t)$ et $Y(t)$. La condition, pour qu'il en soit ainsi, est la *condition d'intégrabilité*. D'après la Note qui termine le Chapitre I (le raisonnement fait à cet endroit s'appliquant sans difficulté au cas actuel), cette condition se forme en écrivant que, les déterminations de $y(t)$ étant supposées dépendre d'une manière quelconque de deux paramètres λ et μ, on a toujours

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\frac{\partial U}{\partial\lambda} = \frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial U}{\partial\mu}. \tag{4}$$

Nous avons vu, au n° 78 de la première Partie, que cela revient à dire que

$$\left\{\begin{aligned} \delta U'_x &= E(\delta x) + F(\delta y), \\ \delta U'_y &= \mathcal{F}(\delta x) + G(\delta y), \end{aligned}\right. \tag{5}$$

E et G étant des fonctionnelles linéaires identiques à leurs adjointes respectives, et F et $\mathcal{F}$ étant les adjointes l'une de l'autre.

Pour $y(t) = y_0(t)$, U se réduit à une fonctionnelle donnée de $x(t)$, U'_x et $E(\delta x)$ sont des données, et la condition que $E(\delta x)$ soit identique à son adjointe est sûrement vérifiée. Pour calculer les fonctionnelles F, $\mathcal{F}$ et G, il faut tenir compte de l'équation (2). Formons d'après cette équation la variation de U'_y, τ restant constant et

la variation de U étant

$$\int_0^1 (U'_x\,\delta x + U'_y\,\delta y)\,dt;$$

on trouve une relation de la forme

$$\delta U'_y = H(\delta U'_x) + L(\delta x) + L_1(\delta y), \tag{6}$$

H, L et L_1 désignant des fonctionnelles linéaires, dont nous désignerons les adjointes par $\mathcal{H}$, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}_1$. Remplaçons $\delta U'_x$ et $\delta U'_y$ par leurs valeurs (5) et égalons séparément les termes en δx et δy des deux membres. Il vient

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{F}(\delta x) &= H[E(\delta x)] + L(\delta x), \\ G(\delta y) &= H[F(\delta y)] + L_1(\delta y). \end{aligned}\right. \tag{7}$$

La première de ces équations donne $\mathcal{F}(\delta x)$. On a alors pour l'expression adjointe

$$F(\delta y) = E[\mathcal{H}(\delta y)] + \mathcal{L}(\delta y),$$

et en portant dans la seconde équation (7)

$$G(\delta y) = H\{E[\mathcal{H}(\delta y)]\} + H[\mathcal{L}(\delta y)] + L_1(\delta y).$$

Pour que la condition (4) soit sûrement vérifiée, il reste à écrire que $G(\delta y)$ est identique à son adjointe. Comme le premier terme est identique à son adjointe, il reste à écrire que l'expression

$$H[\mathcal{L}(\delta y)] + L_1(\delta y) \tag{8}$$

est identique à son adjointe $L[\mathcal{H}(\delta y)] + \mathcal{L}_1(\delta y)$. Telle est la condition d'intégrabilité de l'équation (2).

On remarque que la fonctionnelle $E(\delta x)$, liée aux dérivées fonctionnelles secondes, qui s'introduit dans les calculs, disparaît du résultat et que la condition d'intégrabilité est une équation aux dérivées fonctionnelles du premier ordre. Cette circonstance généralise une circonstance bien connue dans la théorie des systèmes de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_1\left(x, y, z, u, \frac{\partial u}{\partial z}\right),$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi_2\left(x, y, z, u, \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Il peut arriver que la condition d'intégrabilité soit identiquement

vérifiée. L'équation (2) est *complètement intégrable*. Le problème de Cauchy tel qu'il a été posé au n° 44 admet une solution bien déterminée pour chaque fonction $Y(t)$, indépendante des valeurs de $y(t)$ intermédiaires entre $y_0(t)$ et $Y(t)$ qui interviennent dans ce calcul. La solution générale de l'équation (2) dépend alors d'une fonctionnelle arbitraire de $x(t)$.

Si la condition d'intégrabilité ne contient pas U et U'_x, et constitue une relation entre t, $x(t)$, $y(t)$, il ne peut évidemment exister aucune solution de l'équation (2).

En général, sans être identiquement vérifiée, la condition d'intégrabilité contient U et U'_x. Elle constitue alors une équation aux dérivées fonctionnelles que doit vérifier, pour chaque détermination de $y(t)$, U considéré comme fonctionnelle de $x(t)$ (ou exceptionnellement une équation ordinaire déterminant U). La détermination initiale de U pour $y(t) = y_0(t)$ doit être alors choisie parmi les fonctionnelles vérifiant cette condition. Mais cela ne suffit pas. Il faut que, quand $y(t)$ varie, la variation de U étant donnée par l'équation (2), cette condition reste vérifiée. On obtient ainsi des conditions d'intégrabilité de rangs 2, 3, ..., qui peuvent donner lieu aux différents cas déjà indiqués au n° 6.

46. Définitions géométriques. — Nous considérerons un ensemble de déterminations de $x(t)$, $y(t)$, et U comme constituant un *point* d'un *espace fonctionnel*, plus étendu que celui considéré dans la première Partie, dont un point représentait seulement une fonction $x(t)$. En employant le langage des nombres transfinis, on peut dire que l'espace fonctionnel considéré dans la première Partie étant à ω dimensions, nous considérons ici l'espace à $2\omega + 1$ dimensions. Nous appellerons respectivement ces espaces E_ω et $E_{2\omega+1}$.

Nous appellerons *variété* un ensemble *continu* de points; pour définir la continuité, nous dirons que deux points sont infiniment voisins si les valeurs correspondantes de U sont infiniment peu différentes, et si les déterminations correspondantes de $x(t)$ et $y(t)$ sont infiniment voisines, la définition du voisinage étant une de celles définies dans l'espace fonctionnel ordinaire; en principe nous supposerons qu'il s'agit de voisinage en moyenne.

Nous appellerons *courbes* et *surfaces* des variétés ω ou 2ω fois étendues; nous allons d'ailleurs préciser cette définition.

Une *surface* est le lieu des points pour lesquels U est une fonctionnelle donnée (continue) de $x(t)$ et $y(t)$. Une surface est un *plan* si cette fonctionnelle est de la forme

$$U_0 + U_1|[x(t)]| + U_2|[y(t)]|,$$

U_0 étant une constante et U_1 et U_2 des fonctionnelles linéaires.

Deux surfaces, contenant un point $x(t)$, $y(t)$, U, sont *tangentes* en ce point si en ce point les déterminations de δU relatives aux deux surfaces sont les mêmes. Si les variations des fonctionnelles U considérées sont de la forme

$$\delta U = \int_0^1 (U'_x \delta x + U'_y \delta y)\, dt,$$

cela revient à dire que, pour les déterminations considérées de $x(t)$, $y(t)$, les valeurs de U'_x et U'_y sont les mêmes pour les fonctionnelles représentant les deux surfaces.

Un plan est bien défini par la donnée de U'_x, U'_y et d'un de ses points. Un *élément de contact*, constitué par l'ensemble d'un plan et d'un de ses points, est défini par les déterminations de $x(t)$, $y(t)$, U, U'_x, U'_y. L'ensemble d'un point d'une surface et du plan tangent en ce point est un élément de contact *appartenant à cette surface*. Deux surfaces ayant un élément de contact commun sont tangentes en ce point.

Une surface, représentant une fonctionnelle U solution de l'équation (2), est dite *surface intégrale* de cette équation. Tous ses éléments de contact, vérifiant cette équation, sont dits *éléments d'intégrales*.

Une *courbe* est un lieu de points dépendant d'une fonction arbitraire, que nous supposerons être $y(t)$. V désignant une fonctionnelle de $y(t)$, et $v(t)$ une fonction de t dont la forme dépende d'une manière quelconque de $y(t)$, nous appellerons courbe C celle définie par les formules

$$(9) \qquad x(t) = v(t), \qquad U = V|[y(t)]|.$$

Nous désignerons la variation de $v(t)$, quand $y(t)$ varie, par $K(\delta y)$, et supposerons que celle de V est de la forme

$$\int_0^1 V'_y \delta y\, dt.$$

On en déduit sans peine la définition des tangentes à la courbe. En un point de la courbe, le plan défini par U'_x et U'_y est *tangent* à la courbe si l'on a

$$\delta U = \int_0^1 (U'_x\,\delta x + U'_y\,\delta y)\,dt \tag{10}$$

pour un déplacement infinitésimal quelconque sur la courbe, c'est-à-dire si l'on a, quel que soit δy,

$$\int_0^1 V'_y\,\delta y\,dt = \int_0^1 [U'_x\,K(\delta y) + U'_y\,\delta y]\,dt$$
$$= \int_0^1 \delta y\,[\mathcal{K}(U'_x) + U'_y]\,dt$$

($\mathcal{K}$ désignant l'expression adjointe de K), c'est-à-dire enfin si

$$V'_y = \mathcal{K}(U'_x) + U'_y. \tag{11}$$

D'une manière générale, nous dirons qu'un plan contenant un point donné d'une variété et défini par U'_x et U'_y est *tangent* en ce point à une variété, si l'équation (10) est vérifiée au point considéré pour tout déplacement infinitésimal situé sur cette variété.

Nous dirons que des éléments de contact ont une *enveloppe* si leurs points décrivant une variété, le plan correspondant à chaque point touche cette variété en ce point. Nous appellerons *multiplicité* l'ensemble de ces éléments. Nous considérerons spécialement deux sortes de multiplicités :

1° Celles constituées par des points d'une courbe et *des plans* tangents à cette courbe;

2° Celles constituées par une surface et *les plans* tangents à cette surface.

47. Le problème de Cauchy. — Le problème de Cauchy relatif à l'équation (2), que nous supposerons complètement intégrable, consiste à trouver une surface intégrale S contenant une courbe donnée. Nous ne l'avons considéré au n° 44 que dans un cas particulier. Considérons le cas général de la courbe C donnée sous la forme (9), et nous allons chercher à déterminer U en calculant ses dérivées fonctionnelles successives en chaque point de la courbe C.

Les dérivées fonctionnelles premières seront données par les équa-

tions (2) et (10), cette dernière exprimant que le plan tangent défini par U'_x et U'_y touche la courbe C. On en déduit

$$V'_y = \mathcal{H}(U'_x) + \Phi|[x, y, U'_x | U, t]|. \tag{12}$$

Cette équation détermine U'_x en chaque point de la courbe C, et l'une quelconque des équations (2) ou (9) donne ensuite U'_y. L'ensemble des plans tangents à S le long de la courbe C étant connu, nous connaissons une *multiplicité* tangente à S le long de C.

Il peut arriver que la dérivée U'_x ne soit pas déterminée par l'équation (12). Dans le cas où la fonctionnelle Φ est linéaire en U'_x, c'est-à-dire dans le cas où l'équation étudiée (2) est linéaire en U'_x et U'_y, il peut même arriver que l'équation (12) soit une identité. Nous reviendrons plus loin sur ce cas. Mais dans le cas général des équations non linéaires, c'est seulement en calculant les éléments différentiels du second ordre que nous pourrons obtenir des solutions dépendant d'une fonction arbitraire.

48. Calcul des éléments du second ordre. — Soit donc, en gardant les notations du n° 45, à calculer les expressions $E(\delta x)$, $\mathcal{F}(\delta x)$, $F(\delta y)$, $G(\delta y)$. Pour un déplacement le long de la courbe C, $\delta U'_x$ et $\delta U'_y$ ont des valeurs connues, que nous désignerons par $[\delta U'_x]$ et $[\delta U'_y]$. On a alors, par les formules (5),

$$\begin{aligned} [\delta U'_x] &= E[K(\delta y)] + F(\delta y), \\ [\delta U'_y] &= \mathcal{F}[K(\delta y)] + G(\delta y). \end{aligned}$$

D'autre part, les formules (7) donnent, en remplaçant chaque terme par l'expression adjointe

$$\left\{ \begin{aligned} F(\delta y) &= E[\mathcal{H}(\delta y)] + \mathcal{L}(\delta y), \\ G(\delta y) &= \mathcal{F}[\mathcal{H}(\delta y)] + \mathcal{L}_1(\delta y). \end{aligned} \right. \tag{13}$$

Remplaçant F et G par ces expressions, il vient

$$\left\{ \begin{aligned} [\delta U'_x] &= E[K(\delta y) + \mathcal{H}(\delta y)] + \mathcal{L}(\delta y), \\ [\delta U'_y] &= \mathcal{F}[K(\delta y) + \mathcal{H}(\delta y)] + \mathcal{L}_1(\delta y). \end{aligned} \right. \tag{14}$$

Supposons déterminée une fonction δy telle que

$$K(\delta y) + \mathcal{H}(\delta y) = \delta x, \tag{15}$$

les expressions E et $\mathcal{F}$ sont données par

$$(16)\qquad \begin{cases} E(\delta x) = [\delta U'_x] - \mathcal{L}(\delta y), \\ \mathcal{F}(\delta x) = [\delta U'_y] - \mathcal{L}_1(\delta y), \end{cases}$$

et F et G par les formules (15). La détermination complète des éléments du second ordre dépend donc de la résolution de l'équation (15), qui est en général une équation intégrale. On verrait sans peine que le calcul des éléments de tous les ordres successifs dépend de la même équation.

On peut d'ailleurs présenter le résultat un peu autrement. Remplaçant dans la première équation (14) chaque terme par son adjointe, il vient

$$(17)\qquad \mathcal{H}[E(\delta x)] + H[E(\delta x)] = \{\delta U'_x\} - L(\delta x),$$

$\{\delta U'_x\}$ désignant la fonctionnelle adjointe de $[\delta U'_x[$. La fonctionnelle $E(\delta x)$ est ainsi donnée par une équation intégrale linéaire, adjointe de l'équation (15); $\mathcal{F}(\delta x)$, $F(\delta y)$ et $G(\delta y)$ sont ensuite donnés par les formules (5) et (13).

L'expression $E(\delta x)$ étant la variation de Φ'_u considéré comme fonction de δx, le premier membre de l'équation précédente n'est autre que la variation du second membre de l'équation (12), lorsque la fonction inconnue varie. Son déterminant est le déterminant fonctionnel de l'équation (12). C'est donc du déterminant fonctionnel de cette équation (12) que dépend la possibilité de déterminer la surface intégrale contenant la courbe C. S'il n'est pas nul, le problème est possible et déterminé. S'il est nul, il y a impossibilité ou indétermination, et en cas d'indétermination, le calcul des éléments différentiels de chaque ordre introduit le même nombre de paramètres arbitraires.

49. **Équations des caractéristiques.** — Lorsqu'il y a indétermination dans le calcul des éléments du second ordre, on dit que la multiplicité, constituée par la courbe C et les plans tangents obtenus le long de cette courbe, est *caractéristique*. Si l'indétermination est telle que l'expression $E(\delta x)$ soit en chaque point une fonction arbitraire de C, nous dirons que c'est une *caractéristique de première espèce*. Nous ne considérerons que celle-là et supprimerons, pour simplifier le langage, les mots *de première espèce*.

La première formule (14) [ou l'équation (17)] ne devant pas contenir $E(\delta x)$, on a

$$K(\delta y) + \mathcal{H}(\delta y) = 0.$$

Les formules (14) se réduisent alors à

$$[\delta U'_x] = \mathcal{L}(\delta y),$$
$$[\delta U'_y] = \mathcal{L}_1(\delta y).$$

Or $K(\delta y)$, $[\delta U'_x]$, $[\delta U'_y]$ représentent les variations de $x(t)$, U'_x, U'_y lorsqu'on se déplace sur la courbe C, le déplacement étant défini par la donnée de δy. La variation de U ayant la valeur

$$\delta U = \int_0^1 (U'_x\,\delta x + U'_y\,\delta y)\,dt, \tag{18}$$

on obtient, par une transformation évidente de cette expression, l'ensemble des équations

$$\left\{\begin{aligned} \delta x &= -\mathcal{H}(\delta y),\\ \delta U &= \int_0^1 [U'_y - H(U'_x)]\,\delta y\,dt,\\ \delta U'_x &= \mathcal{L}(\delta y),\\ \delta U'_y &= \mathcal{L}_1(\delta y), \end{aligned}\right. \tag{19}$$

qui sont vérifiées lorsqu'on passe d'un élément de contact d'une caractéristique à un élément infiniment voisin. Ce sont les équations aux dérivées fonctionnelles des caractéristiques.

Pour l'étude qui va suivre, il est essentiel d'avoir présent à l'esprit le rôle distinct de ces quatre équations. La première exprime que la fonctionnelle $E(\delta x)$ disparaît de l'équation d'où dépend la recherche des éléments du second ordre; il y a donc impossibilité ou indétermination pour le problème de Cauchy. La seconde est une conséquence de la première et de la formule (18) vraie pour toute multiplicité. Les deux dernières expriment qu'il y a indétermination et non impossibilité; elles résultent donc de la première, si l'on sait que la multiplicité considérée est une surface intégrale, et que la fonctionnelle U admet une variation seconde en tous les points de cette multiplicité.

Nous admettrons d'abord que les équations (19) sont complètement intégrables. Nous reviendrons ensuite sur ce point.

50. **Propriétés des caractéristiques.** — THÉORÈME I. — *La donnée d'un élément d'intégrale* (non singulier) *détermine parfaitement une caractéristique.*

Il faut, bien entendu, que l'élément donné soit un élément d'intégrale.

En partant de cet élément, les variations de $x(t)$, U, U'_x, U'_y sont parfaitement définies par les équations (19). Ces équations sont des équations aux dérivées fonctionnelles, analogues à celles étudiées au Chapitre I, qui s'en distinguent seulement parce qu'on a quatre quantités, dont trois dépendent d'un paramètre, qui varient simultanément en fonction de $x(t)$. Cela ne change rien d'essentiel à la théorie, et au fait que la succession de leurs valeurs est bien déterminée si l'on se donne leur valeur initiale. Seulement, si l'on fait varier $x(t)$ suivant une loi déterminée, elles se réduisent à des équations intégro-différentielles et non à des équations différentielles.

Ces équations étant d'ailleurs complètement intégrables, comme nous l'avons provisoirement admis, un élément de la caractéristique considéré est parfaitement défini par la donnée de $y(t)$ et ne dépend pas du chemin suivi pour aller de la détermination initiale à celle considérée.

D'ailleurs, l'élément initial étant un élément d'intégrale, il en est de même de tous les autres. Pour le montrer, il suffit de montrer que la relation

$$\delta U'_y = H(\delta U'_x) + L(\delta x) + L_1(\delta y), \tag{20}$$

que l'on obtient en différentiant l'équation (2) et remplaçant δU par sa valeur (18), résulte des équations (19). En effet, remplaçant δx, $\delta U'_x$, $\delta U'_y$ par leurs valeurs (19), on obtient la condition

$$\mathcal{L}_1(\delta y) = H[\mathcal{L}(\delta y)] - L[\mathcal{H}(\delta y)] + L_1(\delta y), \tag{21}$$

qui exprime que l'expression $H[\mathcal{L}(\delta y)] + L_1(\delta y)$ est identique à son adjointe; c'est la condition d'intégrabilité de l'équation (2), que nous avons supposée vérifiée.

Bien entendu, le théorème de Cauchy relatif aux équations aux dérivées fonctionnelles (19) peut être en défaut pour certains éléments, que nous appellerons *éléments singuliers d'intégrales.* Pour ces éléments il peut donc exister plusieurs caractéristiques les contenant.

THÉORÈME II. — *Toute surface intégrale est un lieu de caractéristiques.*

Il est évidemment possible de se déplacer sur une surface intégrale S, à partir de n'importe quel point donné, de manière que la première équation (19) soit vérifiée. En admettant toujours que cette équation soit complètement intégrable, elle définit une courbe C sur la surface S, et d'après les remarques finales du n° 49, toutes les équations (19) sont vérifiées pour la multiplicité constituée par la courbe C et les plans tangents à S tout le long de cette courbe. Cette multiplicité est donc une caractéristique. C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — *Toute surface intégrale ayant un élément* (non singulier) *commun avec une caractéristique la contient tout entière.*

En effet, l'élément est situé sur une caractéristique située tout entière sur la surface intégrale (théorème II). D'après le théorème I cette caractéristique, ayant un élément non singulier commun avec la caractéristique donnée, est confondue avec elle.

51. Solution du problème de Cauchy. — En utilisant la connaissance des caractéristiques, on peut résoudre le problème de Cauchy autrement que par les calculs successifs des éléments différentiels de tous les ordres.

La courbe C étant donnée, on commence par déterminer en chaque point les déterminations de U'_x et U'_y comme il a été indiqué au n° 47. On obtient ainsi un certain nombre de multiplicités, composées d'éléments d'intégrales et contenant la courbe C. Soit $\mathfrak{M}$ une de ces multiplicités. Il s'agit de déterminer les surfaces intégrales contenant C.

Soit S une telle surface. Elle contient toutes les caractéristiques définies par les éléments de $\mathfrak{M}$. Ces caractéristiques, dépendant d'une fonction arbitraire, sont en général toutes distinctes et ont pour lieu la surface S. Cette propriété définit la surface S, qui est alors la seule surface intégrale contenant $\mathfrak{M}$.

Mais il peut arriver que les caractéristiques définies par les éléments de $\mathfrak{M}$ ne soient pas toutes distinctes. Supposons en effet que sur une surface intégrale S on choisisse des caractéristiques Θ dépen-

dant de p paramètres, et sur chacune de ces caractéristiques des éléments vérifiant p conditions. On n'a qu'à prendre pour multiplicité $\mathfrak{M}$ les éléments ainsi choisis; une telle multiplicité est une caractéristique au sens généralisé, considéré d'abord n° 49. L'ensemble des caractéristiques $\mathfrak{C}$ définies par les éléments de $\mathfrak{M}$ ne sera pas plus général que si l'on ne se donnait qu'un élément sur chaque caractéristique $\mathfrak{C}$, c'est-à-dire si l'on se donnait des éléments dépendant de p paramètres. Il existe d'autres surfaces intégrales contenant cette multiplicité, et le calcul de leurs éléments caractéristiques de chaque ordre introduira une fonction nouvelle, non complètement arbitraire, mais assujettie seulement à p conditions.

Il peut arriver que $p = 0$; la multiplicité $\mathfrak{M}$ est alors une caractéristique de première espèce, et le calcul des éléments de chaque ordre introduit une fonction arbitraire.

52. Le cas général est évidemment celui où la surface S est bien définie comme lieu des caractéristiques correspondant aux éléments de $\mathfrak{M}$. Il n'y a donc qu'une surface intégrale contenant $\mathfrak{M}$. Il reste à montrer qu'elle existe.

Un procédé consiste à montrer *a priori* l'existence de cette surface. C'est l'extension du théorème de Cauchy-Kowalevski, reposant sur le calcul successif des éléments des divers ordres.

Nous allons employer un autre procédé, qui consiste à montrer que la surface S, lieu des multiplicités caractéristiques $\mathfrak{C}$ définies par les éléments de $\mathfrak{M}$, est une surface intégrale. Nous savons que ces multiplicités ne comprennent que des éléments d'intégrales. Mais il reste à montrer qu'elles ont une enveloppe, c'est-à-dire, chaque élément étant constitué par un point M et un plan P, que la surface S lieu des points M touche en chacun de ces points le plan P correspondant. Pour le montrer, il suffit de montrer que pour tout déplacement sur la surface S on a

$$\delta U = \int_0^1 (U'_x\,\delta x + U'_y\,\delta y)\,dt, \tag{22}$$

les valeurs de U'_x et U'_y étant celles qui correspondent au plan P.

Il nous suffit de considérer sur la surface S des points dépendant de deux paramètres λ et μ, tels que pour λ constant on ait des points d'une même caractéristique, et pour $\mu = 0$ des points de la courbe C.

Étant donnée une succession quelconque de points sur la surface S, ou bien elle est sur une même caractéristique $\mathcal{C}$ et la formule (22) est exacte, ou bien on peut s'arranger pour l'obtenir en faisant varier λ et laissant μ constant. On a donc à démontrer que

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \int_0^1 \left(U'_x \frac{\partial x}{\partial \lambda} + U'_y \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) dt,$$

ou bien, cette relation étant évidemment vérifiée pour $\mu = 0$,

$$(23) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda \, \partial \mu} = \int_0^1 \left(U'_x \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \, \partial \mu} + U'_y \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \, \partial \mu} + \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial U'_x}{\partial \mu} + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial U'_y}{\partial \mu} \right) dt.$$

D'autre part, les équations (19) étant vérifiées pour les déterminations $\frac{\partial x}{\partial \mu}, \ldots, \frac{\partial U'_y}{\partial \mu}$ de $\delta x, \ldots, \delta U'_y$, on a

$$\frac{\partial U}{\partial \mu} = \int_0^1 \left(U'_x \frac{\partial x}{\partial \mu} + U'_y \frac{\partial y}{\partial \mu} \right) dt,$$

d'où

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \lambda \, \partial \mu} = \int_0^1 \left(U'_x \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \, \partial \mu} + U'_y \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \, \partial \mu} + \frac{\partial x}{\partial \mu} \frac{\partial U'_x}{\partial \mu} + \frac{\partial y}{\partial \mu} \frac{\partial U'_y}{\partial \lambda} \right) dt.$$

La formule à démontrer s'écrit donc

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial U'_x}{\partial \mu} + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial U'_y}{\partial \mu} \right) dt = \int_0^1 \left(\frac{\partial x}{\partial \mu} \frac{\partial U'_x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \mu} \frac{\partial U'_y}{\partial \lambda} \right) dt$$

ou, en remplaçant $\frac{\partial x}{\partial \mu}, \frac{\partial U'_x}{\partial \mu}, \frac{\partial U'_y}{\partial \mu}$ par leurs valeurs tirées des équations (19),

$$\int_0^1 \left[\frac{\partial x}{\partial \lambda} \mathcal{L}\left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right) + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \mathcal{L}_1\left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right) \right] dt = \int_0^1 \left[\frac{\partial y}{\partial \mu} \frac{\partial U'_y}{\partial \lambda} - \mathcal{H}\left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right) \frac{\partial U'_x}{\partial \lambda} \right] dt,$$

ou encore

$$\int^1 \frac{\partial y}{\partial \mu} \left[H\left(\frac{\partial U'_x}{\partial \lambda}\right) + L\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right) + L_1\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right) - \frac{\partial U'_y}{\partial \lambda} \right] dt = 0.$$

Or l'expression sous le signe d'intégration est nulle, tous les éléments considérés étant des éléments d'intégrales, et par suite la rela-

tion (20) étant vérifiée pour un déplacement quelconque. Le théorème est donc démontré [1].

On voit donc que l'intégration complète de l'équation aux dérivées fonctionnelles partielles (2), et en particulier la résolution du problème de Cauchy relatif à cette équation, se ramènent aux problèmes analogues relatifs au système d'équations aux dérivées fonctionnelles ordinaires (19). Ce résultat (ainsi d'ailleurs que les principales circonstances de la démonstration) généralise le résultat fondamental de la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

53. Intégrabilité des équations des caractéristiques. — Démontrons maintenant, ce que nous avons admis jusqu'ici, que les équations (19) sont complètement intégrables. On peut le vérifier par le calcul [2]. Nous allons en donner une démonstration qui montre mieux la raison de cette circonstance.

Montrons d'abord que les conditions d'intégrabilité de ces équations sont nécessairement vérifiées *pour les éléments d'intégrales*.

Considérons à cet effet un élément d'intégrale $\mathcal{E}$. En partant de cet élément, et faisant varier $y(t)$ d'une manière quelconque, on obtient par les équations (19) une succession d'éléments d'intégrales dont l'ensemble constitue ce qu'on peut encore appeler une *caractéristique*. Si la condition d'intégrabilité n'était pas vérifiée pour ces éléments, on pourrait s'arranger pour revenir à la détermination initiale $y_0(t)$ de $y(t)$ en retrouvant un élément différent, et même des éléments différents $\mathcal{E}'$ dépendant d'au moins un paramètre.

Or les raisonnements des n°s 51 et 52 s'appliquent avec cet aspect de la notion de caractéristique. Toute surface intégrale contenant l'élément $\mathcal{E}$ contient tous ceux de la caractéristique considérée et en particulier tous les éléments $\mathcal{E}'$. D'autre part, on peut choisir une

---

(1) On remarque que ce procédé d'intégration montre l'existence d'une intégrale quelle que soit la multiplicité $\mathfrak{M}$. Nous savons d'autre part que la méthode, qui consiste à chercher en chaque point de $\mathfrak{M}$ les variations successives de U, peut conduire à une impossibilité. Il n'y a pas contradiction. La surface intégrale existe, mais le calcul de $\delta^2 U$ par exemple est impossible en certains points qui sont *singuliers* sur la surface intégrale.

On sait qu'une circonstance analogue peut se présenter dans la théorie des équations aux dérivées partielles mises en évidence, et conduit à trouver une surface intégrale admettant la courbe donnée C comme arête de rebroussement.

(2) *Voir* Paul Lévy, n° 26 du Mémoire déjà cité (*Circ. Palerme*, 1914).

courbe C et une multiplicité $\mathfrak{M}$ la contenant, formée d'éléments d'intégrales pour lesquelles $y(t) = y_0(t)$, comprenant l'élément $\mathcal{E}$ et non les éléments $\mathcal{E}'$; le raisonnement du n° 52 nous montre qu'on peut, si l'équation (2) est complètement intégrable, trouver une surface intégrale coupant la variété plane $y(t) = y_0(t)$ suivant la courbe C et tangente le long de cette courbe à la multiplicité $\mathfrak{M}$, contenant par suite l'élément $\mathcal{E}$ et non les éléments $\mathcal{E}'$. Cette conclusion étant en contradiction avec la précédente, le résultat énoncé est démontré. Donc :

L'équation (2) *étant complètement intégrable, les conditions d'intégrabilité des équations des caractéristiques sont vérifiées pour tous les éléments d'intégrales.*

54. Considérons maintenant un élément $\mathcal{E}$ qui ne vérifie pas l'équation (2). Pour cet élément, la différence $U'_y - \Phi$ a une valeur déterminée $f(t)$. C'est donc un élément d'intégrale pour l'équation

$$U'_y = \Phi|[x, y, U'_x | U, t]| + f(t).$$

Or l'addition à la fonctionnelle Φ du terme constant $f(t)$ (¹) ne change pas sa variation, et par suite ne change pas la condition d'intégrabilité ni les équations des caractéristiques. Cette équation est donc complètement intégrable. En lui appliquant le résultat précédent, on voit que les conditions d'intégrabilité des équations (19) sont vérifiées pour l'élément $\mathcal{E}$, qui n'est pas un élément d'intégrale. *Ces équations sont donc complètement intégrables.*

Il y a d'ailleurs une différence essentielle entre ce résultat et le précédent. Il repose sur une circonstance de calcul, et ne se retrouve pas pour des équations aux dérivées fonctionnelles partielles d'un type un peu différent du précédent, par exemple pour une équation non résolue du type

$$\Phi|[x, y, U'_x, U'_y | U, t]| = 0,$$

ou pour celle qui sera étudiée n° 60. Au contraire, le fait que les conditions d'intégrabilité des équations des caractéristiques soient vérifiées pour tous les éléments d'intégrales, résulte d'un raisonne-

(¹) Constant lorsqu'on fait varier x, y, U'_x et U. La lettre t est plutôt un *indice* qu'une *variable*.

ment qui s'applique à toutes les équations aux dérivées fonctionnelles partielles, du premier ordre et complètement intégrables.

55. **La notion d'enveloppe.** — Considérons une surface S, dépendant d'un paramètre λ, définie par l'équation

$$F|[x, y|U, \lambda]| = 0. \tag{24}$$

L'intersection de cette surface et d'une surface infiniment voisine conduit à l'équation

$$F'_\lambda|[x, y|U, \lambda]| = 0. \tag{25}$$

Les équations (24) et (25) définissent sur la surface S une variété $\mathcal{C}$ dont le lieu, quand λ varie, est une surface Σ, qui est par définition l'*enveloppe* de S. Je dis que S et Σ sont tangentes en tous les points de $\mathcal{C}$.

Le plan tangent à S, en un point de $\mathcal{C}$, est défini par une relation linéaire entre δx, δy, δU, obtenue en différentiant l'équation (24). On peut l'écrire

$$F'_x(\delta x) + F'_y(\delta y) + F'_U\,\delta U = 0.$$

L'équation de Σ étant obtenue en considérant λ, non comme une constante, mais comme une fonctionnelle définie implicitement par l'équation (25), le plan tangent à Σ a donc pour équation

$$F'_x(\delta x) + F'_y(\delta y) + F'_U\,\delta U + F'_\lambda\,\delta\lambda = 0,$$

$\delta\lambda$ étant une fonctionnelle linéaire de δx, δy et δU dont la valeur s'obtient en différentiant l'équation (25). Mais son coefficient F'_λ est précisément nul, d'après cette équation, et il n'y a pas besoin de la calculer; le plan tangent à Σ ainsi obtenu coïncide avec le plan tangent en S. C. Q. F. D.

Le raisonnement est identique à celui qu'on fait dans l'espace ordinaire. On peut d'ailleurs remarquer qu'une section de la figure par une variété linéaire à n dimensions donne une surface, dépendant de λ et tangente à son enveloppe. La propriété de contact, vérifiée dans une section quelconque, doit l'être dans l'espace.

Le résultat obtenu se généralise dans le cas de familles de surfaces ayant un degré de généralité quelconque. Soit par exemple une famille de surfaces S

$$F|[x(t), y(t), \varphi(s)|U]| = 0,$$

dépendant d'une fonction arbitraire $\varphi(s)$. En cherchant les points communs à une de ces surfaces, et à toutes les surfaces infiniment voisines obtenues en faisant varier $\varphi(s)$ d'une manière quelconque, on est conduit à annuler la dérivée fonctionnelle F'_φ. Cette équation contenant un paramètre arbitraire définit sur chaque surface S des points ne dépendant plus que d'une fonction arbitraire, constituant une courbe. Le lieu de cette courbe, quand $\varphi(s)$ varie, est la surface enveloppe [1].

56. La notion d'intégrale complète. — Nous appellerons *intégrale complète* de l'équation (2) une famille d'intégrales contenant dans son ensemble tous les éléments d'intégrales. Les éléments d'intégrales dépendant de trois fonctions arbitraires et un paramètre, et chaque intégrale contenant des éléments dépendant de deux fonctions arbitraires, les surfaces d'une intégrale complète dépendent d'une fonction $\varphi(s)$ et d'un paramètre λ.

Soit Σ une surface intégrale quelconque. Tout élément $\mathcal{E}$ de cette surface appartient à une surface S de l'intégrale complète, et Σ est l'enveloppe de ces surfaces. Inversement, une surface enveloppe de surfaces S de l'intégrale complète ne contient que des éléments d'intégrales; c'est une surface intégrale. La connaissance d'une intégrale complète résout donc complètement le problème de l'intégration de l'équation (2).

Les familles de surfaces S peuvent être d'une généralité plus ou moins grande. On trouve ainsi comme surfaces intégrales les surfaces S elles-mêmes, puis des enveloppes de surfaces S dépendant d'un nombre fini quelconque de paramètres, puis des enveloppes de surfaces S vérifiant un nombre fini de conditions, enfin l'enveloppe de toutes les surfaces. Cette dernière enveloppe joue un rôle spécial; elle est dite *intégrale singulière*. Les éléments communs à chaque surface S et à cette enveloppe dépendent d'une fonction assujettie à une relation.

Si l'on considère une autre intégrale, ses éléments communs avec chaque surface S dépendent d'au moins une fonction arbitraire. Ils contiennent tous les éléments singuliers S, de puisque, si S dépend

---

[1] La théorie des enveloppes s'applique bien entendu à un espace fonctionnel ayant une généralité absolument quelconque.

d'une manière absolument quelconque d'un paramètre λ, l'équation $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$ qui définit l'enveloppe est vérifiée pour les éléments singuliers. Il en résulte que si l'on remplace l'intégrale complète considérée initialement par une autre, on ne change ni l'intégrale singulière, ni les multiplicités communes à cette intégrale et à chaque surface de l'intégrale complète.

57. On peut aisément, en partant de l'intégrale complète, retrouver les propriétés des caractéristiques. Cherchons à cet effet les intégrales contenant un élément donné $\mathcal{E}$, constitué par un point M et un plan P.

Cet élément $\mathcal{E}$ correspond à une surface déterminée S_0 de l'intégrale complète. Une intégrale Σ contenant $\mathcal{E}$ doit être l'enveloppe d'une famille de surfaces S comprenant S_0. Si l'élément $\mathcal{E}$ est singulier, une telle surface Σ comprend nécessairement S_0. Mais s'il n'est pas singulier, la condition que cette famille ne comprenne, comme surfaces S voisines de S_0, que celles qui contiennent M (au second ordre près), impose une condition aux variations $\delta\varphi(s)$ et $\delta\lambda$ de la fonction et du paramètre dont dépendent ces surfaces. On n'a le choix qu'entre les surfaces S, voisines de S_0 et dépendant d'une fonction arbitraire, et qui par suite contiennent (au second ordre près) tous les éléments d'une courbe C située sur S_0. L'enveloppe contient cette courbe, et y touche la surface S_0. La multiplicité constituée par cette courbe et les plans tangents à S_0 le long de cette courbe est alors une caractéristique. Toutes les surfaces intégrales contenant l'élément non singulier $\mathcal{E}$ contiennent tous ceux de cette caractéristique.

On a d'ailleurs un résultat analogue pour un élément $\mathcal{E}$ de l'intégrale singulière. Un tel élément, situé sur une surface S_0 de l'intégrale complète, appartient à toutes les caractéristiques de cette surface. Une intégrale quelconque contenant $\mathcal{E}$ et qui n'est pas l'intégrale singulière contient une de ces caractéristiques; de toute façon, elle contient tous les éléments singuliers de S_0. On a donc un résultat analogue à celui obtenu dans le cas général. Le fait de connaître un élément d'une intégrale entraîne la connaissance d'une infinité d'autres éléments; seulement, dans le cas particulier considéré, ils dépendent d'un paramètre de moins.

Il existe une autre sorte d'éléments singuliers qui mettent ce

résultat en défaut. Il peut arriver que deux surfaces distinctes de l'intégrale complète contiennent un même élément, et qu'on en déduise deux caractéristiques distinctes contenant cet élément. Les surfaces intégrales qui le contiennent, contiennent alors l'une ou l'autre de ces caractéristiques, et deux surfaces ne contenant pas la même caractéristique n'ont pas d'autre élément commun que celui donné.

Les éléments de cette nature sont évidemment singuliers pour les équations (19). Ils s'introduisent comme solution étrangère dans la recherche, en partant de l'équation (2), des éléments de l'intégrale singulière, et se distinguent de ceux-ci parce qu'ils n'ont pas d'enveloppe.

58. La connaissance d'une intégrale complète permet de résoudre le problème de Cauchy sans passer par l'intermédiaire des caractéristiques. On n'a qu'à chercher les surfaces de l'intégrale complète tangentes à la courbe donnée C et prendre leur enveloppe.

Cette solution est d'ailleurs exactement équivalente à l'autre. En chaque point M de C, la recherche de l'élément d'intégrale contenant la tangente à C, ou de la surface de l'intégrale complète tangente à C, sont deux problèmes équivalents et comportant le même nombre de solutions. Mais si l'on connaît l'intégrale complète, la caractéristique correspondant à cet élément est obtenue sans intégration comme multiplicité commune à la surface choisie dans l'intégrale complète et son enveloppe.

La connaissance d'une intégrale complète, permettant de résoudre le problème de Cauchy, nous permet d'affirmer que l'équation étudiée est complètement intégrable. Si une équation du type (2) n'est pas complètement intégrable, il y a donc des éléments de contact, vérifiant cette équation, et n'appartenant à aucune surface intégrale.

59. **Les équations linéaires.** — Considérons le cas où l'équation (2) est linéaire en U'_x et U'_y, c'est-à-dire de la forme

$$U'_y = H(U'_x) + \Phi[[x, y \mid U, t]], \tag{26}$$

H étant une fonctionnelle linéaire de U'_x, dépendant en outre des fonctions x et y et des variables t et U.

Dans ce cas, l'indétermination dans le problème de Cauchy peut apparaître dès le calcul des dérivées fonctionnelles premières. L'équation (12) s'écrit alors

$$\mathcal{K}(U'_x) + H(U'_x) = \Phi - V'_y,$$

et la fonction U'_x reste indéterminée si

$$K(\delta y) = -\mathcal{H}(\delta y),$$
$$V'_y = \Phi_x,$$

c'est-à-dire si la courbe C vérifie les équations aux dérivées fonctionnelles

$$(27) \qquad \begin{cases} \delta x = -\mathcal{H}(\delta y), \\ \delta U = \int_0^1 \Phi | [x, y | U, t] | \delta y \, dt. \end{cases}$$

Une telle courbe est une caractéristique de l'équation (26). Par des raisonnements analogues à ceux faits dans le cas général, on montre que la surface intégrale la plus générale peut être définie comme lieu de caractéristiques dépendant d'une fonction arbitraire (l'ensemble des caractéristiques dépendant d'une fonction et d'un paramètre).

La théorie générale s'applique d'ailleurs ici. Une courbe caractéristique et la succession des plans tangents à une surface intégrale le long de cette courbe constituent une multiplicité caractéristique jouissant exactement des propriétés indiquées dans la théorie générale. Mais il n'y a pas besoin de faire intervenir les plans tangents pour mettre en évidence la forme de la solution générale.

Comme dans le cas analogue de la théorie des équations aux dérivées partielles, il est facile de développer les circonstances qui se présentent lorsque le second membre de l'équation (26) se réduit à $H(U'_x)$, cette fonction ne dépendant pas de U. Dans ce cas, comme dans le cas plus général où $H(U'_x)$ étant toujours indépendant de U, le terme Φ est quelconque, il est possible d'obtenir explicitement l'expression de la solution générale à l'aide d'une fonctionnelle arbitraire.

60. Cas des fonctionnelles dépendant d'un contour plan C et d'une fonction $u(s)$. — Nous désignerons par C un contour plan, par s la

longueur d'arc, par $u(s)$ une fonction donnée en chaque point de C, par Φ une fonctionnelle de C et de $u(s)$. Nous définirons la déformation de C par la donnée du déplacement normal δn; nous désignerons par $\delta u(s)$ la variation de u lorsque le point dont dépend cette fonction se déplace normalement à C, par Φ'_u et Φ'_n les dérivées fonctionnelles de Φ. Soit à étudier l'équation

$$\Phi'_n = \Psi[\,[C, u, \Phi'_u\,|\,\Phi, s]\,]. \tag{28}$$

D'aprés le n° 78 de la première Partie, la condition pour que $\frac{\partial^2\Phi}{\partial\lambda\,\partial\mu} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\mu\,\partial\lambda}$ s'obtient en écrivant que

$$\left\{\begin{aligned} \delta\Phi'_u &= E(\delta u) + F(\delta n) + k\Phi'_u\,\delta n,\\ \delta\Phi'_{n'} &= \mathcal{F}(\delta u) + G(\delta n) + \Phi'_u\,u'\,\delta n', \end{aligned}\right. \tag{29}$$

E et G désignant des fonctionnelles linéaires identiques chacune à son adjointe, $\mathcal{F}$ l'adjointe de F, k la courbure de C, comptée positivement dans le même sens que δn, u' et $\delta n'$ les dérivées de u et δn par rapport à s,

La variation de Φ'_n, lorsque le point du contour C dont dépend cette dérivée se déplace normalement au contour, et que

$$\delta\Phi = \int_C (\Phi'_u\,\delta u + \Phi'_n\,\delta n)\,ds,$$

s'obtient en différentiant l'équation (28) et remplaçant $\delta\Phi$ par sa valeur. Elle est de la forme

$$\delta\Phi'_n = H(\delta\Phi'_u) + L(\delta u) + L_1(\delta n). \tag{30}$$

La condition d'intégrabilité se trouve alors par des calculs analogues à ceux du n° 45. En remplaçant $\delta\Phi'_u$ et $\delta\Phi'_n$ par leurs expressions (29) et séparant les termes en δu et ceux en δn, on trouve

$$\mathcal{F}(\delta u) = H[E(\delta u)] + L(\delta u),$$
$$G(\delta n) + \Phi'_u\,u'\,\delta n' = H[F(\delta n) + k\Phi'_u\,\delta n] + L_1(\delta n),$$

d'où l'on tire

$$F(\delta n) = E[\mathcal{H}(\delta n)] + \mathcal{L}(\delta n)$$

et

$$G(\delta n) - H\{E[\mathcal{H}(\delta n)]\} = H[\mathcal{L}(\delta n) + k\Phi'_u\,\delta n] + L_1(\delta n) - \Phi'_u\,u'\,\delta n'.$$

La condition d'intégrabilité de l'équation (28) s'obtient en écrivant

que le second membre de cette expression est une fonctionnelle linéaire de δn identique à son adjointe.

La théorie du problème de Cauchy et des caractéristiques est aussi tout à fait analogue à celle développée à propos de l'équation (2), les seules différences dans les calculs provenant des derniers termes des formules (29), qui n'ont pas leurs analogues dans les formules (5). On trouve, pour les équations des caractéristiques,

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} &\delta u(s) = -\mathcal{H}(\delta n),\\ &\delta\Phi = \int_C [\Phi'_n - \mathrm{H}(\Phi'_u)]\,\delta n\,ds,\\ &\delta\Phi'_u = \mathcal{L}(\delta n) + k\Phi'_u\,\delta n,\\ &\delta\Phi'_n = \mathcal{L}_1(\delta n) + k\Phi'_u\,\mathcal{H}(\delta n) + 2\Phi'_u u'\,\delta n' + \frac{d(\Phi'_u u')}{ds}\,\delta n. \end{aligned}\right.$$

Si l'équation (28) est complètement intégrable, les conditions d'intégrabilité de ces équations sont toujours vérifiées pour les éléments d'intégrales, mais ne le sont pas pour des éléments quelconques (*voir* remarque finale du n° 54).

CHAPITRE V.

L'EXTENSION DES ÉQUATIONS DE JACOBI-HAMILTON.

SOMMAIRE : Notions générales. — Cas de l'intégrale de Dirichlet. — Généralisation.

61. Notions générales. — Soit $\varphi(a, b, \alpha, \beta)$ le minimum de l'intégrale

$$(1) \qquad \int_a^b f(x, y, y')\,dx,$$

y étant une fonction de x continue, à dérivées première et seconde continues, égale à α pour $x = a$ et à β pour $x = b$. On sait que ce minimum, s'il existe, est obtenu pour une solution de l'équation différentielle du second ordre d'Euler

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'},$$

et que le minimum obtenu, considéré comme fonction de b et β, vérifie une équation aux dérivées partielles du premier ordre, dite *équation de Jacobi-Hamilton*, qui résulte de l'élimination de y' entre les formules

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial \beta} = \dfrac{\partial f}{\partial y'}, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial b} = f - y\,\dfrac{\partial f}{\partial y'}, \qquad [f = f(b, \beta, y')]. \end{cases}$$

On obtient une équation analogue relative à la limite inférieure d'intégration, en remplaçant b et β par a et α, et φ par $-\varphi$.

Si l'on remplace l'intégrale (1) par l'intégrale double

$$I = \int\int_S f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

et qu'on en cherche le minimum parmi toutes les fonctions $z(x, y)$, continues ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres, prenant des valeurs données $u(s)$ sur le contour C de l'aire S, l'équation (2) est remplacée par une équation aux dérivées partielles. Le minimum devient une fonctionnelle dépendant de C et $u(s)$, et l'équation de Jacobi-Hamilton est remplacée par une équation aux dérivées fonctionnelles partielles, du type étudié n° 60.

Nous allons d'abord étudier un exemple particulier. Nous traiterons ensuite le cas général [1].

62. Cas de l'intégrale de Dirichlet. — On appelle ainsi l'intégrale

$$(4) \qquad I = \int\int_S \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy.$$

Appelons $u(s)$ et $u_1(s)$ les valeurs sur le contour de z et de sa dérivée normale, et δu la variation de u lorsque, le contour C qui entoure l'aire S se déformant et z variant, le point dont dépend cette fonction se déplace normalement au contour. On a donc

$$(5) \qquad \delta u = \delta_1 z = \delta z + u_1\, \delta n.$$

Si δn est compté positivement vers l'intérieur, la variation de I a la valeur

$$\delta I = -\int_C (u_1^2 + u'^2)\, \delta n\, ds + 2\int\int_S \left(\frac{\partial z}{\partial x}\, \delta\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\, \delta\frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Par intégration par parties, l'intégrale double s'écrit

$$-\int_C u_1\, \delta z\, ds - 2\int\int_S \Delta z\, \delta z\, dx\, dy.$$

Remplaçant alors dans l'intégrale simple δz par sa valeur tirée de

---

[1] Dans mon Mémoire déjà cité (*Rend. Circ. Mat. Palermo*, 1914), j'ai traité le cas plus général où la fonction f contient des dérivées d'ordres quelconques de la fonction z. L'extension au cas des intégrales multiples est également facile. Pour l'extension à ce cas des principales formules du Chapitre précédent, *voir* FISCHER, *American Journal of Mathematics*, vol. XXXIX, 1917.

Voir aussi, sur l'extension des équations de Jacobi-Hamilton, les Mémoires de MM. Volterra et Fréchet.

la formule (5), il vient

$$\delta I = -2\int_C u_1\,\delta u\,ds + \int_C (u_1^2 - u'^2)\,\delta n\,ds - 2\int\int_S \Delta z\,\delta z\,dx\,dy.$$

Si l'on prend pour z la fonction harmonique et régulière égale à u sur le contour, l'intégrale double disparaît; l'intégrale I se réduit alors à une fonctionnelle Φ de C et $u(s)$, égale, comme on sait, au minimum de I lorsque C et $u\ (s)$ sont donnés, et il vient

$$(6)\qquad \delta\Phi = -2\int_C u_1\,\delta u\,ds + \int_C (u_1^2 - u'^2)\,\delta n\,ds.$$

Les dérivées fonctionnelles de Φ sont donc

$$(7)\qquad \Phi'_u = -2u_1, \qquad \Phi'_n = u_1^2 - u'^2.$$

Elles ne sont pas exprimées en fonction seulement des arguments de la fonctionnelle Φ, puisque u_1 figure dans ces formules. En éliminant u_1, on a l'équation aux dérivées fonctionnelles partielles

$$(8)\qquad \Phi_n = \frac{1}{4}\Phi_u'^2 - u'^2,$$

du type étudié au n° 60.

63. En différentiant cette équation, tenant compte de ce que $u' = \frac{du}{ds}$ et $\delta\,ds = -k\,\delta n\,ds$, on trouve

$$\delta\Phi'_n = \frac{1}{2}\Phi'_u\,\delta\Phi'_u - 2u'\frac{d\,\delta u}{ds} - 2ku'^2\,\delta n,$$

de sorte que, avec les notations du n° 60,

$$\begin{aligned} H(\delta\Phi'_u) &= \frac{1}{2}\Phi'_u\,\delta\Phi_u, \\ L(\delta u) &= -2u'\frac{d\,\delta u}{ds}, \\ L_1(\delta n) &= -2ku'^2\,\delta n. \end{aligned}$$

La condition d'intégrabilité s'obtient alors en formant l'expression

$$\frac{1}{2}\Phi'_u\left[2\frac{d}{ds}(u'\,\delta n) + k\Phi'_u\,\delta n\right] - 2ku'^2\,\delta n - \Phi'_u u'\,\delta n' = (\Phi'_u u'' + 2k\Phi'_n)\,\delta n,$$

et écrivant qu'elle est identique à son adjointe. Elle est identiquement vérifiée; l'équation (8) est complètement intégrable.

Formons, de même, les équations des caractéristiques, en tenant compte de leur forme générale indiquée n° 60. Il vient

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\delta u = -\frac{1}{2}\Phi'_u\,\delta n,\\ &\delta\Phi = \int_C\left(\Phi'_n - \frac{1}{2}\Phi'^2_u\right)\delta n\,ds = -\int_C\left(\frac{1}{4}\Phi'^2_u + u'^2\right)\delta n\,ds,\\ &\delta\Phi'_u = 2\frac{d}{ds}(u'\,\delta n) + k\Phi'_u\,\delta n. \end{aligned}\right.$$

Ces trois équations définissent les variations de u, Φ, Φ'_u. La dérivée Φ'_n est à chaque instant donnée par l'équation (8).

64. Il est facile de donner du fait que l'équation (8) est complètement intégrable une démonstration ne nécessitant aucun calcul, et montrant mieux la raison de cette circonstance. Nous pouvons aisément former une intégrale complète de cette équation; cela suffit, nous le savons, pour prouver qu'elle est complètement intégrable.

Remplaçons à cet effet, dans la définition de l'intégrale I, l'aire S par la région limitée entre deux contours C et Γ. Tous les calculs faits s'appliquent, et la formule (6) donne toujours la variation de Φ, à condition d'étendre les intégrales simples à l'ensemble des contours C et Γ. Mais si le contour Γ reste fixe, et si les valeurs de z sur ce contour ne varient pas, les intégrales simples relatives à Γ disparaissent, la formule (6) s'applique en ne considérant que le contour C. La fonctionnelle Φ ainsi formée est une intégrale de l'équation (8).

Par addition d'une constante arbitraire, on obtient une autre intégrale.

Je dis qu'on obtient ainsi une intégrale complète. Les intégrales que nous venons de définir dépendent d'ailleurs de deux fonctions arbitraires et d'un paramètre, c'est-à-dire d'une fonction arbitraire de plus qu'il n'est nécessaire. Il n'en est pas moins nécessaire de montrer qu'elles contiennent tous les éléments d'intégrales.

Or un élément d'intégrale peut être défini par la donnée de déterminations $\overline{C}$, $\overline{u}$, $\overline{u}_1$, $\overline{\Phi}$ de C, u, u_1, Φ, les dérivées Φ'_u et Φ'_n étant données par les formules (7). Ces quantités sont bien arbitraires, puisqu'on peut choisir une fonction harmonique $z(x, y)$ telle qu'on ait sur $\overline{C}$, $z = \overline{u}$, $\frac{dz}{dn} = \overline{u}_1$ (du moins si les données sont analytiques). Prenant alors pour Γ un contour situé dans la région où cette fonc-

tion est régulière, et pour valeurs données sur Γ celles de cette fonction, ajoutant à l'intégrale Φ définie ci-dessus une constante convenable, on obtient bien une intégrale de l'équation (8) contenant l'élément donné, c'est-à-dire prenant la valeur $\overline{\Phi}$ pour le contour $\overline{C}$ et pour $u = \overline{u}$, tandis que ses dérivées fonctionnelles prennent les valeurs $-2\overline{u}_1$ et $\overline{u}_1^2 - \overline{u}'^2$. L'équation (8) est donc bien complètement intégrable.

65. Passant maintenant aux caractéristiques, nous pouvons les définir de la manière suivante :

On choisit une fonction harmonique $z(x, y)$, un contour Γ en chaque point duquel elle soit régulière, une constante Φ_0. Soit S l'aire limitée par Γ et un autre contour variable C, choisi de manière que la fonction z soit régulière dans cette aire; soient $u(s)$ et $u_1(s)$ les valeurs sur C de z et de sa dérivée normale. L'élément C, $u(s)$,

$$\Phi = \Phi_0 + \int\int_S \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy,$$

$$\Phi'_u = -2u_1, \qquad \Phi'_n = u_1^2 - u'^2,$$

définit, lorsque C varie, une caractéristique.

Ce résultat se vérifie d'ailleurs aisément à l'aide des formules (9). On a en effet

$$\delta u = u_1\, \delta n = -\frac{1}{2}\Phi'_u\, \delta n,$$

$$\delta\Phi = -\int_C (u_1^2 + u'^2)\, \delta n\, ds = -\int_C \left(\frac{1}{4}\Phi'^2_u + u'^2\right) \delta n\, ds,$$

$$\delta\Phi'_u = -2\,\delta u_1 = -2\frac{d^2 z}{dn^2}\,\delta n + 2u'\,\delta n'.$$

Les deux premières formules ne sont autres que les deux premières formules (9); en tenant compte de ce que z est harmonique, c'est-à-dire que

$$\frac{d^2 z}{dn^2} = -u'' + ku_1\,\delta n \quad (^1),$$

---

(1) Appelons $\frac{dz}{dt}$ et $\frac{d^2 z}{dt^2}$ les dérivées première et seconde relatives à un déplacement sur la tangente. Pour les dérivées premières, on a évidemment $\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{ds} = u'$. Mais la variation de u', lorsqu'on se déplace sur la courbe, provient à la fois du

la dernière se réduit à la dernière formule (9). Comme de plus Φ'_n vérifie bien l'équation (8), toutes les équations des caractéristiques sont vérifiées.

L'hypothèse que $z(x, y)$ est harmonique n'est intervenue que pour vérifier que $\delta\Phi'_u$, et par suite $\delta\Phi'_n$, ont les valeurs voulues. Si par suite on supprime cette hypothèse, on obtient une multiplicité vérifiant les deux premières équations des caractéristiques, mais non les autres. On sait que pour une telle multiplicité le problème de Cauchy n'est pas indéterminé, mais impossible (du moins en ce qui concerne les solutions régulières).

66. **Généralisation.** — On traite de même le cas plus général de l'intégrale

$$(10) \qquad I = \int\int_S f(x, y, z, p, q)\, dx\, dy,$$

p et q désignant $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$. Sa variation a la valeur

$$\begin{aligned}\delta I &= -\int_C f\,\delta n\, ds + \int\int_S \left(\frac{\partial f}{\partial z}\delta z + \frac{\partial f}{\partial p}\delta p + \frac{\partial f}{\partial q}\delta q\right) dx\, dy \\ &= -\int_C f\,\delta n\, ds - \int_C \left(\frac{\partial f}{\partial p}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial q}\cos\beta\right)\delta z\, ds \\ &\qquad + \int\int_S \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial q}\right)\delta z\, dx\, dy,\end{aligned}$$

$\cos\alpha$ et $\cos\beta$ désignant les cosinus directeurs de la normale intérieure. Si le contour C et les valeurs u de z sont donnés, si de plus z vérifie l'équation

$$(11) \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial q},$$

la variation de I est nulle. Plaçons-nous dans le cas où la fonction f est essentiellement positive; l'équation (11) est alors une équation du *type elliptique* et sa solution est bien déterminée si l'on connaît sa

---

déplacement du point et de la rotation de la tangente, de sorte que

$$u''\, ds = \frac{d^2 z}{dt^2}\, ds + k\frac{dz}{dn}\, ds,$$

et par suite, si z est harmonique, $u'' = -\frac{d^2 z}{dn^2} + k u_1\, \delta n$.

valeur $u(s)$ sur le contour. Cette solution est d'ailleurs, parmi toutes les fonctions égales à $u(s)$ sur C, celle qui rend l'intégrale I minima; ce minimum I est alors une fonctionnelle Φ de C et u, dont la variation est

$$\delta\Phi = -\int_C f\,\delta n\,ds - \int_C \left(\frac{\partial f}{\partial p}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial q}\cos\beta\right)\delta z\,ds,$$

ou, en tenant compte de la formule (5),

$$(12)\qquad \begin{aligned}\delta\Phi = &-\int_C \left(\frac{\partial f}{\partial p}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial q}\cos\beta\right)\delta u\,ds\\ &+\int_C \left[\left(\frac{\partial f}{\partial p}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial q}\cos\beta\right)u_1 - f\right]\delta n\,ds.\end{aligned}$$

On a donc

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned}\Phi'_u + \frac{\partial f}{\partial p}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial q}\cos\beta &= 0,\\ \Phi'_n + u_1\Phi'_u + f &= 0.\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, sur C, f se réduit à une fonction de s, u, u' et u_1. Par ces équations, le contour C et $u(s)$ étant donnés, Φ'_u et Φ'_n apparaissent comme donnés en chaque point en fonction de u_1. L'élimination de u_1 donne une équation aux dérivées fonctionnelles, vérifiée par la fonctionnelle Φ.

67. Par une extension analogue à celle du n° 64, remplaçons l'aire S par l'aire comprise entre C et un contour fixe Γ, ne considérons que les fonctions (z) solutions de l'équation (11) et prenant des valeurs données sur Γ, et ajoutons à Φ une constante arbitraire Φ_0. Je dis qu'on obtient ainsi une intégrale complète, contenant un élément d'intégrale quelconque, défini par C, u, Φ et u_1, les dérivées fonctionnelles Φ'_u et Φ'_n étant données par les formules (13).

On peut en effet choisir z solution de l'équation (11), égal à u sur C, sa dérivée normale étant égale à u_1. Il suffit alors de choisir un contour Γ sur lequel la fonction z soit régulière, et de prendre comme valeurs données sur Γ celles de la fonction z. L'intégrale définie par Γ et les valeurs données sur Γ est une fonctionnelle dont les dérivées Φ'_u et Φ'_n ont bien, pour le contour C et la détermination choisie de $u(s)$, les valeurs voulues; comme on peut lui ajouter une constante quelconque, on peut s'arranger pour qu'elle ait elle-même la valeur voulue et contienne en conséquence l'élément donné.

68. Le procédé de définition des caractéristiques du n° 65 se généralise aussi aisément.

Choisissons une solution z de l'équation (11), régulière dans l'aire S comprise entre le contour C et un contour fixe Γ. Prenant pour $u(s)$ les valeurs de z sur C, l'élément défini par C, $u(s)$,

$$\Phi = \Phi_0 + \int\int f(x, y, z, p, q)\, dx\, dy,$$

$$\Phi'_u = -\frac{\partial f}{\partial p}\cos\alpha - \frac{\partial f}{\partial q}\cos\beta,$$

$$\Phi'_n = -u_1\Phi'_u - f,$$

définit, lorsque C varie, une caractéristique.

Il appartient en effet à une surface intégrale, celle de l'intégrale complète obtenue en prenant le contour Γ considéré et comme valeurs données sur le contour celles de $z(x, y)$. Il suffit alors de vérifier la première équation des caractéristiques.

Pour former d'abord la fonctionnelle $\Pi(\delta\Phi'_u)$, différentions la deuxième équation (13) en considérant C et $u(s)$ comme fixes. Il vient

$$\delta\Phi'_n + u_1\,\delta\Phi'_u + \left(\Phi'_u + \frac{\partial f}{\partial u_1}\right)\delta u_1 = 0.$$

D'ailleurs, d'après la première équation (13), le coefficient de δu_1 est nul [1]. Il vient donc

$$\delta\Phi'_n = \Pi(\delta\Phi'_u) = -u_1\,\delta\Phi'_u.$$

La première équation des caractéristiques

$$\delta u = -\mathcal{H}(\delta n) = u_1\,\delta n$$

est alors immédiatement vérifiée. La succession d'éléments considérés définit donc une caractéristique. Comme on peut s'arranger pour

---

[1] On a en effet

$$p = u_1\cos\alpha - u'\cos\beta, \qquad q = u_1\cos\beta + u'\cos\alpha;$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = \frac{\partial f}{\partial p}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial q}\cos\beta.$$

qu'elle contienne un élément d'intégrale quelconque, nous avons sûrement obtenu la définition générale des caractéristiques.

Si l'on supprimait la condition que $z(x, y)$ soit une solution de l'équation (11), on n'aurait donc pas une caractéristique. La première équation des caractéristiques étant toujours vérifiée (puisque cette condition n'est pas intervenue dans la vérification), on a dans ce cas une multiplicité n'appartenant à aucune surface intégrale régulière.

CHAPITRE VI.

TYPES DIVERS D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES FONCTIONNELLES PARTIELLES ET DE SYSTÈMES D'ÉQUATIONS.

SOMMAIRE : Notions générales. — Équations linéaires. — Systèmes d'équations linéaires. — Équations non linéaires. — Systèmes d'équations non linéaires. — Équations contenant un paramètre. — Généralisation.

69. **Notions générales.** — Les équations aux dérivées fonctionnelles étudiées Chapitre I généralisaient les équations aux différentielles totales. L'objet du présent Chapitre est d'étudier les équations généralisant les équations aux dérivées partielles, ou les systèmes de p équations vérifiées par une fonction de n variables. En faisant croître n indéfiniment, mais laissant p fini, on obtient les systèmes d'équations que nous allons étudier.

Nous commencerons par le cas linéaire pour étudier ensuite le cas général. Les considérations que nous exposerons généralisent la théorie classique des systèmes d'équations aux dérivées partielles, telle qu'elle est exposée dans le Traité de M. Goursat (Chap. II, VI et VII).

Nous étendrons ensuite les résultats obtenus à des systèmes de forme plus générale, comprenant à la fois les précédents et les équations du Chapitre IV.

70. **Équations linéaires.** — Considérons une fonctionnelle U de la fonction $x(t)$. L'équation linéaire que nous nous proposons d'étudier d'abord est du type

$$(1) \qquad \int_0^1 F[[x(\tau)|t]|U'_{x(t)}\,dt = 0.$$

Considérons, dans l'espace fonctionnel qui représente la fonction $x(t)$, une *courbe* (*lieu des points dépendant d'un paramètre* λ), telle que pour un déplacement le long de cette courbe,

on ait

$$(2) \qquad \delta x(t) = \mathrm{F}\,|\,[x(\tau)\,|\,t]\,|\,d\lambda.$$

Une pareille courbe est ce que nous appellerons une *caractéristique* de l'équation (1).

Remarquons d'abord que la détermination de la caractéristique contenant un point donné est un problème d'analyse ordinaire. La fonction $x(t)$ dépendant du paramètre λ, on a à déterminer une fonction de deux variables t et λ, vérifiant l'équation (2) qui est du type intégro-différentiel, et se réduisant pour $\lambda = 0$ à une fonction connue.

Si l'on considère un déplacement le long d'une caractéristique, on a

$$\delta \mathrm{U} = d\lambda \int_0^1 \mathrm{F}\,|\,[x(\tau)\,|\,t]\,|\,\mathrm{U}'_x(t)\,dt.$$

L'équation (1) exprime que cette quantité est nulle. Son intégrale générale est constituée par l'ensemble des fonctionnelles constantes le long des caractéristiques.

Supposons en particulier que F se réduise à une fonction $f(t)$ de t seulement [1], que l'on peut supposer normale, c'est-à-dire telle que

$$\int_0^1 f^2(t)\,dt.$$

La droite contenant le point $x(t)$ contient aussi le point

$$\mathrm{X}(t) = x(t) - f(t) \int_0^1 f(\tau)\,x(\tau)\,d\tau,$$

projection orthogonale du point $x(t)$ sur le plan passant par l'origine et perpendiculaire aux caractéristiques, évidemment indépendant du point choisi sur la droite. On peut alors exprimer la solution générale de l'équation étudiée; c'est une fonctionnelle arbitraire de $\mathrm{X}(t)$.

71. Considérons l'équation plus générale

$$(3) \qquad \int_0^1 \mathrm{F}\,|\,[x(\tau)\,|\,\mathrm{U}, t]\,|\,\mathrm{U}'_{x(t)}\,dt = \mathrm{G}\,|\,[x(\tau)\,|\,\mathrm{U}]\,|.$$

---

[1] *Voir* sur ce cas et un autre plus général VOLTERRA, *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, 15 mars 1914.

Dans l'espace fonctionnel $E_{\omega+1}$, plus étendu que celui considéré précédemment [1], représentant à la fois U et $x(t)$, considérons les *caractéristiques*, courbes définies par les équations

$$(4)\qquad \begin{cases} \delta x(t) = F|[x(\tau)|U, t]|\,d\lambda, \\ \delta U \quad = G|[x(\tau)|U]|\,d\lambda. \end{cases}$$

On peut évidemment, sur une surface intégrale de l'équation (3), se déplacer de manière que la première équation (4) soit vérifiée. On a alors, pour un tel déplacement,

$$\delta U = d\lambda \int_0^1 F|[x(\tau)|U, t]|\,U'_{x(t)}\,dt = G|[x(\tau)|U]|\,d\lambda,$$

c'est-à-dire que la courbe décrite est une caractéristique. Toute surface intégrale est donc un lieu de caractéristiques.

Inversement, un lieu de caractéristiques est une surface intégrale, l'équation (3) exprimant que le plan tangent à chaque point à la surface qui représente U contient la tangente à la caractéristique.

Il peut naturellement exister une intégrale singulière, enveloppe de l'intégrale générale. Par chaque point de cette surface passent deux caractéristiques, l'une située sur cette surface, l'autre sur les surfaces enveloppées. Les points de l'intégrale singulière sont donc aussi des points singuliers pour les équations (4).

Par un point non singulier A ne passe qu'une caractéristique, et toute surface intégrale contenant A la contenant tout entière.

72. Systèmes d'équations linéaires. — Considérons d'abord un système de deux équations du type (1), soit

$$(5)\qquad \begin{cases} X_1(U) \equiv \int_0^1 F_1|[x(\tau)|t]|\,U'_{x(t)}\,dt = 0, \\ X_2(U) \equiv \int_0^1 F_2|[x(\tau)|t]|\,U'_{x(t)}\,dt = 0. \end{cases}$$

Désignons par C_1 et C_2 les caractéristiques de ces deux équations, considérées séparément, par Γ_1 et Γ_2 celles qui passent par un point A. Une intégrale du système (5), ayant une valeur donnée en A, a,

[1] En employant le langage des nombres transfinis, c'est un espace à $\omega+1$ dimensions.

d'après le n° 70, la même valeur sur Γ_1, et par suite sur la surface Σ formée par les courbes C_2 qui coupent Γ_1, et de même sur la surface Σ' formée par les courbes C_1 qui coupent Γ_2.

Il peut d'ailleurs arriver que ces surfaces soient confondues. Les équations des caractéristiques des deux systèmes étant

$$\frac{\partial x(t)}{\partial \lambda} = F_1 | [x(\tau) | t] |, \tag{6}$$

$$\frac{\partial x(t)}{\partial \mu} = F_2 | [x(\tau) | t] |, \tag{7}$$

la condition pour qu'il en soit ainsi est que l'on puisse déterminer une famille de fonctions $x(t)$, dépendant de deux paramètres λ et μ, et vérifiant à la fois ces deux équations, c'est-à-dire que l'on ait la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial x(t)}{\partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial x(t)}{\partial \lambda}.$$

Cette condition s'écrit, en désignant par F'_1 et F'_2 les dérivées fonctionnelles de F_1 et F_2,

$$\begin{aligned} &\int_0^1 F'_1 | [x(\tau) | t, t_1] | F_2 | [x(\tau) | t_1] | \, dt_1 \\ &= \int_0^1 F'_2 | [x(\tau) | t, t_1] | F_1 | [x(\tau) | t_1] | \, dt_1. \end{aligned} \tag{8}$$

Si cette condition est vérifiée identiquement, les surfaces Σ et Σ' sont confondues, quel que soit le point A. Le système (5), dans ce cas, est dit *complet*. Il exprime que U est constant le long de chaque surface Σ, condition qui définit l'intégrale générale.

Si la condition (8) n'est pas identiquement vérifiée, désignons la différence des deux membres par $F_3 [x(\tau) | t] |$. Partons du point A; faisons varier d'abord λ d'une quantité $d\lambda$, puis μ de $d\mu$, le chemin décrit dans l'espace fonctionnel étant donné par les formules (6) et (7); nous obtenons un point B de la surface Σ; en intervertissant l'ordre des variations $d\lambda$ et $d\mu$, nous obtenons un point B' de la surface Σ'. Le vecteur BB' représente évidemment la fonction $F_3 \, d\lambda \, d\mu$. Comme une fonctionnelle U intégrale du système (5) a la même valeur en B et B', elle a la même valeur le long des courbes C_3

d'équation

$$\frac{\partial x(t)}{\partial \nu} = F_3 | [x(\tau) | t] | = \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial x(t)}{\partial \mu} - \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial x(t)}{\partial \lambda}.$$

Elle vérifie donc l'équation

$$(9) \qquad X_3(U) \equiv \int_0^1 F_3 | [x(\tau) | t] | \, U'_{x(t)} \, dt = 0$$

dont les courbes C_3 sont les caractéristiques.

Ce résultat est d'ailleurs facile à vérifier sans passer par l'intermédiaire des caractéristiques, car on a identiquement

$$X_3(U) \equiv X_2[X_1(U)] - X_1[X_2(U)].$$

Les équations (5) entraînent donc l'équation analogue (8). Celle-ci, rapprochée de chacune des conditions initiales, donne lieu à une condition d'intégrabilité, et, continuant de même, on peut obtenir une suite de nouvelles équations de la même forme, chacune d'elles exprimant que U est constant le long d'une famille de courbes caractéristiques.

Il peut d'ailleurs arriver qu'on obtienne effectivement une infinité d'équations distinctes, ou bien qu'après un nombre fini d'opérations on arrive à un *système complet*, tel que les conditions d'intégrabilité obtenues en rapprochant ses équations deux à deux soient des conséquences des équations déjà écrites. Dans un cas comme dans l'autre, le système obtenu exprime que la fonctionnelle U est constante le long de certaines variétés Σ, sur chacune desquelles on pourra prendre comme courbes coordonnées des caractéristiques des diverses équations obtenues. Si ces équations sont en nombre fini p, les variétés Σ sont à p dimensions. Si elles sont en nombre infini, les variétés Σ ont une infinité de dimensions; il peut même arriver qu'il n'existe qu'une variété Σ comprenant tout l'espace fonctionnel, et dans ce cas le système (5) n'admet pas d'autre solution que les solutions évidentes $U = \text{const}$.

73. Remarques. — 1° La théorie serait tout à fait analogue si, au lieu de deux équations données initialement, on en avait un plus grand nombre.

2° Si les équations sont du type « linéaire à coefficients constants »

$$(10)\qquad X_i(U) = \int_0^1 f_i(t)\, U'_{x(t)}\, dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

les conditions d'intégrabilité sont identiquement vérifiées. Les caractéristiques de chaque équation sont des droites parallèles, et les surfaces Σ sont des variétés linéaires à p dimensions, parallèles entre elles. Le système (10) exprime que U est constant sur chacune des variétés.

Supposons que la suite de fonctions

$$(11)\qquad f_1(t),\ f_2(t),\ \ldots,\ f_n(t),\ \ldots$$

soit une suite de fonctions telle que toute fonction de carré sommable $x(t)$ soit représentable par une série $\Sigma a_n f_n(t)$ convergente en moyenne [1]. Une fonctionnelle U de $x(t)$ se réduit alors à une fonction $u(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ des coefficients de cette série, et l'équation $X_i(U) = 0$ exprime que cette fonction ne dépend pas de a_i.

Si alors on considère un système d'une infinité d'équations du type (10), deux cas sont à distinguer suivant que les fonctions $f_i(t)$ figurant dans ces équations constituent ou non toutes les fonctions de la suite (11). Dans le premier cas, la fonctionnelle U, solution du système étudié, ne peut être qu'une constante; ce cas rentre dans celui indiqué à la fin du n° 72. Dans le second cas, U peut encore dépendre d'un nombre fini ou infini de paramètres.

74. Les considérations du n° 72 s'étendent aisément au cas de systèmes composés d'équations du type plus général (3). Considérons par exemple le système de deux équations

$$(12)\qquad \begin{cases} X_1(U) \equiv \displaystyle\int_0^1 F_1 \,|\, [x \,|\, U, t] \,|\, U'_{x(t)}\, dt - G_1 \,|\, [x \,|\, U] \,| = 0, \\ X_2(U) \equiv \displaystyle\int_0^1 F_2 \,|\, [x \,|\, U, t] \,|\, U'_{x(t)}\, dt - G_2 \,|\, [x \,|\, U] \,| = 0, \end{cases}$$

---

[1] Nous savons, d'après le Chapitre VII de la première Partie, qu'il existe de telles suites. Les séries trigonométriques (étudiées au Chapitre III de la première Partie) en sont un cas particulier.

x étant écrit au lieu de $x(\tau)$, pour simplifier l'écriture. Nous désignerons par $X_1(U, V)$ et $X_2(U, V)$ les expressions obtenues en remplaçant U'_x par V'_x, mais laissant U quand cette quantité intervient par elle-même.

Désignons par C_1 et C_2 les caractéristiques de chacune des équations (12), dans l'espace $E_{\omega+1}$. Comme au n° 72, deux cas sont à distinguer suivant qu'une certaine condition d'intégrabilité est remplie ou non.

Soient Γ_1 et Γ_2 les caractéristiques de chacune des équations passant par un point A. Si la condition d'intégrabilité est remplie, les courbes C_1 coupant Γ_2 et les courbes C_2 coupant Γ_1 définissent, de deux manières différentes, une même surface Σ, et cela quel que soit A. La propriété fondamentale des caractéristiques étant qu'une surface intégrale qui contient un point (non singulier) d'une caractéristique la contient tout entière, une surface intégrale du système (12) qui contient un point (non singulier) d'une surface Σ_1 la contient tout entière. Les surfaces intégrales sont des lieux de surfaces Σ.

Si au contraire la condition d'intégrabilité n'est pas vérifiée, on peut, en partant d'un point A et suivant des caractéristiques C_1 et C_2, décrire complètement une surface Σ à un nombre p de dimensions, fini ou infini, mais supérieur à 2. Les surfaces intégrales sont, comme dans le cas précédent, des lieux de surfaces Σ.

Le plan tangent à Σ en A est défini par les tangentes aux courbes C_1 et C_2 passant par A, et les tangentes à d'autres courbes C_3, C_4, ..., C_p, que l'on peut définir comme au n° 72, et qui sont les caractéristiques d'équations analogues aux équations (12) et résultant de ces équations. Les formules seules sont un peu différentes de celles du n° 72.

Les équations des courbes C_3 résultent évidemment des formules

$$\frac{\partial x(t)}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\frac{\partial x(t)}{\partial \mu} - \frac{\partial}{\partial \mu}\frac{\partial x(t)}{\partial \lambda},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\frac{\partial U}{\partial \mu} - \frac{\partial}{\partial \mu}\frac{\partial U}{\partial \lambda},$$

où λ et μ sont des paramètres correspondant aux courbes C_1 et C_2, par des formules analogues aux formules (4). En développant ces

expressions, on trouve pour les seconds membres

$$F_3|[x|U, t]| = \frac{\partial F_2|[x|U, t]|}{\partial U} G_1|[x|U]| - \frac{\partial F_1|[x|U, t]|}{\partial U} G_2|[x|U]|$$
$$+ \int_0^1 \left\{ F'_2|[x|U, t, t_1]|F_1|[x|U, t_1]| - F'_1|[x|U, t, t_1]|F_2|[x|U, t_1]| \right\} dt_1,$$

$$G_3|[x|U\ \ | = \frac{\partial G_2|[x|U]|}{\partial U} G_1|[x|U]| - \frac{\partial G_1|[x|U]|}{\partial U} G_2|[x|U]|$$
$$+ \int_0^1 \left\{ G'_2|[x|U, t_1]|F_1|[x|U, t_1]| - G'_1|[x|U, t_1]|F_2|[x|U, t_1]| \right\} dt_1.$$

Ces courbes C_3 sont les caractéristiques de l'équation

$$X_3(U) \equiv \int_0^1 F_3|[x|U, t]|U_{x(t)}\, dt - G_3|[x|U]| = 0.$$

On constate d'ailleurs aisément que cette équation s'écrit identiquement

$$X_1[U, X_2(U)] - X_2[U, X_1(U)] = 0,$$

ce qui permet de vérifier, sans passer par l'intermédiaire des caractéristiques, qu'elle résulte des deux équations (12).

75. Équations non linéaires. — Étudions maintenant l'équation non linéaire

$$(13) \qquad \Phi|[x(t), X(t)|U]| = 0 \qquad [X(t) = U'_{x(t)}].$$

Désignons la variation de la fonctionnelle Φ par

$$\delta\Phi = \int_0^1 (\Phi'_x\, \delta x + \Phi'_X\, \delta X)\, dt + \Phi'_U\, \delta U.$$

Pour chaque détermination de $x(t)$, les éléments du second ordre d'une fonctionnelle U sont définis par la donnée de la fonctionnelle linéaire identique à son adjointe

$$\delta X(t) = E(\delta x).$$

Si la fonctionnelle U est une intégrale, on a

$$\delta\Phi = \int_0^1 [\Phi'_x + E(\Phi'_X) + X\Phi'_U]\, \delta x\, dt = 0,$$

et cela quel que soit δx, et par suite

$$\Phi'_x + E(\Phi'_X) + X\Phi'_U = 0.$$

Cette condition exprime que

$$\delta x(t) = \Phi'_X \, d\lambda$$

entraîne

$$\delta X(t) = -\Phi'_x - X(t)\Phi'_U.$$

Ceci nous conduit à considérer les multiplicités caractéristiques, composées d'éléments dépendant d'un paramètre λ, et tels que

$$(14) \qquad \begin{cases} \delta x(t) = \Phi'_X \, d\lambda, \\ \delta U \quad = d\lambda \displaystyle\int_0^1 X(t)\Phi'_X \, dt, \\ \delta X(t) = -[\Phi'_x + X(t)\Phi'_U] \, d\lambda. \end{cases}$$

Un élément d'intégrale (à l'exception de certains éléments singuliers) définit parfaitement une caractéristique. Une surface intégrale S de l'équation (13), contenant un élément singulier d'une caractéristique, la contient tout entière. Cela résulte évidemment de ce qu'un déplacement sur la surface, vérifiant la première équation (14), vérifie aussi la dernière, comme nous venons de le voir; la seconde est vérifiée pour tout déplacement de la surface S.

La théorie des équations du type (13) est donc tout à fait analogue à celle des équations étudiées Chapitre IV. La détermination de l'intégrale générale et la solution du problème de Cauchy se ramènent aux problèmes analogues concernant les équations des caractéristiques, qui sont réductibles à des équations intégro-différentielles. On est donc ramené à un problème d'analyse ordinaire.

Si, au lieu de se placer dans l'espace $E_{\omega+1}$ dont chaque point représente un système de déterminations de $x(t)$ et U, on se place dans l'espace $E_{2\omega+1}$ dont chaque point représente un système de déterminations de $x(t)$, $X(t)$ et U, les équations (14) définissent des courbes, et non des multiplicités. Ces courbes sont les caractéristiques de l'équation linéaire

$$(15) \qquad \int_0^1 [\Phi'_X(\Psi'_x + X\Psi'_U) - \Psi'_X(\Phi'_x + X\Phi'_U)] \, dt = 0,$$

Ψ étant une fonctionnelle inconnue de $x(t)$, $X(t)$, U. Ainsi, comme

pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre, une équation non linéaire se ramène à une équation linéaire à un plus grand nombre de variables indépendantes.

76. Systèmes d'équations non linéaires. — Nous nous contenterons encore, pour indiquer les circonstances qui se présentent, de considérer le cas des deux équations, soit

$$(16)\qquad \begin{cases} \Phi[[x(t), X(t) \mid U]] = 0, \\ \Psi[[x(t), X(t) \mid U]] = 0. \end{cases}$$

Désignons par $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ les multiplicités caractéristiques de ces deux équations, qui sont des multiplicités dans l'espace $E_{\omega+1}$, et par C_1 et C_2 les courbes de l'espace $E_{2\omega+1}$ qui leur correspondent. Nous avons toujours deux cas à distinguer suivant qu'une certaine condition d'intégrabilité est vérifiée ou non.

Dans le premier cas, en partant d'un point A de l'espace $E_{2\omega+1}$ et décrivant des courbes C_1 et C_2, on reste sur une surface à deux dimensions. Comme l'équation

$$\delta U = \int_0^1 X(t)\,\delta x(t)\,dt, \qquad [X(t) = U'_x(t)]$$

est vérifiée pour ces déplacements, cela revient à dire qu'en partant d'un élément $\mathcal{E}$ de l'espace $E_{\omega+1}$ et se déplaçant le long des multiplicités $\mathfrak{M}_1$ ou $\mathfrak{M}_2$, on obtient des éléments dépendant de deux paramètres et constituant une multiplicité $\mathfrak{M}$. Toute surface intégrale ayant un élément (non singulier) commun avec une telle multiplicité la contient tout entière. Ces multiplicités jouent pour le système (16) le même rôle que les multiplicités à une dimension $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ pour chacune de ses équations.

Dans le cas où la condition d'intégrabilité n'est pas vérifiée, on obtient (comme aux n°s 72 et 74) des résultats analogues, les surfaces Σ et multiplicités $\mathfrak{M}$ étant seulement remplacées par des surfaces ou multiplicités analogues, mais à plus de deux dimensions.

Le procédé pour obtenir leurs équations est toujours le même. Désignant par e une quelconque des quantités $x(t)$, $X(t)$, U, par λ et μ des paramètres dont la variation indique des déplacements situés respectivement sur $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$, on obtient une multiplicité ana-

logue $\mathfrak{M}_3$ définie par les équations

$$(17) \qquad \frac{\partial e}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\frac{\partial e}{\partial \mu} - \frac{\partial}{\partial \mu}\frac{\partial e}{\partial \lambda}.$$

On obtient ensuite successivement les équations de multiplicités analogues $\mathfrak{M}_4$, $\mathfrak{M}_5$, ..., et le plan tangent à la surface Σ qui représente la multiplicité $\mathfrak{M}$ dans l'espace $E_{2\omega+1}$ est défini par les tangentes aux courbes C_1, C_2, C_3, ... qui représentent les multiplicités $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$, ...

En développant les équations des multiplicités $\mathfrak{M}_3$, représentées symboliquement par la formule (17), on constate que ce sont les multiplicités caractéristiques de l'équation

$$(18) \qquad [\Phi, \Psi] \equiv \int_0^1 [\Phi'_X(\Psi'_x + X\Psi'_U) - \Psi'_X(\Phi'_x + X\Phi'_U)]\, dt = 0.$$

Cette équation, par la manière dont elle est obtenue, est une conséquence des équations (16). En effet, toute surface intégrale du système (16) ayant un élément non singulier commun avec une multiplicité caractéristique $\mathfrak{M}_3$ de l'équation (18), la contient tout entière. C'est donc une intégrale de cette équation.

77. On reconnaît dans l'expression (18) la généralisation des crochets de Jacobi. Lorsque les fonctionnelles Φ et Ψ ne dépendent pas de U, elle se réduit à l'expression

$$(19) \qquad (\Phi, \Psi) = \int_0^1 (\Phi'_X \Psi'_x - \Phi'_x \Psi'_X)\, dt$$

qui généralise les parenthèses de Poisson. On vérifie sans peine l'exactitude de la formule

$$[(\Phi, \Psi), \Omega] + [(\Psi, \Omega), \Phi] + [(\Omega, \Phi), \Psi] = 0,$$

qui généralise le théorème de Poisson. Si donc Ψ et Ω sont deux intégrales de l'équation (18), il en est de même de (Ψ, Ω). En d'autres termes, supposons que le système

$$(20) \qquad \Psi = \Omega = (\Psi, \Omega) = 0$$

soit complet, et que l'équation $\Phi = 0$, rapprochée de chacune des deux équations $\Psi = 0$ et $\Omega = 0$, constitue un système complet, le

système

$$(21) \qquad \Phi = \Psi = \Omega = (\Psi, \Omega) = 0$$

est également complet. C'est là un résultat intuitif si au lieu des équations constituant ces systèmes on écrit les caractéristiques correspondantes. Désignons en effet par C_1, C_2, C_3, C_4 les courbes de l'espace $E_{2\omega+1}$ correspondant aux caractéristiques des quatre équations (21). Les courbes C_2 et C_3 ne définissent pas des surfaces à deux dimensions, mais des surfaces (Σ_3) à trois dimensions contenant aussi les courbes C_3. Ces surfaces peuvent se déformer de manière que chacun de leurs points décrive une ligne C_1, puisqu'elles sont formées de courbes C_1 qui jouissent de cette propriété. On obtient ainsi des surfaces (Σ_4), dont on ne peut sortir en décrivant des courbes C_1, C_2, C_3 et C_4. Cela prouve bien que le système (21) est complet.

Il n'est pas plus difficile de vérifier, par un calcul direct, qu'une fonctionnelle U, intégrale du système (16), vérifie l'équation (18). En posant

$$\delta U = \int_0^1 X(t)\,\delta x(t)\,dt, \qquad \delta X(t) = F(\delta x),$$

nous avons vu n° 75 que l'équation $\Phi = 0$, différentiée, donne

$$\Phi'_x + X\,\Phi'_U + E(\Phi'_X) = 0.$$

De même, l'équation $\Psi = 0$ donne

$$\Psi'_x + X\,\Psi'_U + E(\Psi'_X) = 0.$$

Multiplions la première de ces formules par $-\Psi'_x$, la seconde par Φ'_x, ajoutons et intégrons. Il vient

$$[\Phi, \Phi] + \int_0^1 [\Phi'_X\,E(\Psi'_X) - \Psi'_X\,E(\Phi'_X)]\,dt = 0,$$

et, par suite, la fonctionnelle E étant identique à son adjointe,

$$[\Phi, \Psi] = 0.$$

78. On peut chercher à étendre le principe de la méthode de Jacobi et Mayer. Plaçons-nous par exemple dans le cas où les fonctionnelles Φ et Ψ ne contiennent pas U.

L'adjonction aux équations proposées (16) de nouvelles équations,

déduites des premières par l'opérateur de Jacobi donne, après un nombre d'opérations fini ou infini, un système complet. Si ses multiplicités caractéristiques $\mathfrak{M}$ sont si étendues qu'il n'en existe qu'une infinité simple, chacune d'elles représente une surface intégrale. On peut dans ce cas des équations écrites déduire, par des opérations de l'analyse ordinaire, l'expression de $X(t)$ en fonction de U et $x(t)$, et U est alors donné par une équation aux dérivées fonctionnelles ordinaires, complètement intégrable.

Dans le cas contraire, on ne peut pas tirer $X(t)$ des équations écrites. On peut alors chercher à adjoindre aux équations écrites une nouvelle équation $\Omega = 0$ constituant avec elles un système complet, et, d'après le numéro précédent, il suffit que la fonctionnelle Ω vérifie les équations

$$(\Phi, \Omega) = 0, \qquad (\Psi, \Omega) = 0.$$

L'intégration complète de ce système linéaire est équivalente à celle du proposé, conduisant aux mêmes équations des caractéristiques. Mais il suffit d'en trouver une solution particulière, d'où l'on déduira une solution plus générale $\Omega + \text{const}$.

Si les équations écrites ne suffisent pas pour obtenir l'expression de $X(t)$ en fonction de U et $x(t)$, on cherchera à adjoindre au système une nouvelle équation, et ainsi de suite, un nombre fini ou infini de fois. On pourra enfin exprimer $X(t)$ en fonction de U et $x(t)$ et en déduire U par l'intégration d'une équation aux dérivées fonctionnelles ordinaires. On aura ainsi une intégrale complète, qui permet d'obtenir l'intégrale générale ou de résoudre le problème de Cauchy.

Ainsi, le principe de la méthode s'applique, mais le résultat est beaucoup moins intéressant que dans la théorie des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Sauf dans le cas où les intégrales du système proposé ne dépendent que d'un nombre fini de paramètres, il faut une infinité d'opérations. De plus, la résolution des équations obtenues par rapport à $X(t)$ peut être très difficile, bien que ce soit un problème d'analyse ordinaire. La méthode qui généralise celle de Cauchy, qui consiste à déterminer les surfaces Σ, est certainement préférable et plus dans la nature des choses [1].

---

[1] Cela est d'ailleurs vrai dans l'analyse ordinaire. On invoque en général en faveur de la méthode de Jacobi et Mayer que chaque opération abaisse de deux unités l'ordre du système à intégrer. C'est là, au fond, une propriété des équations

79. Équations contenant un paramètre. — Soit U une fonction arbitraire de p fonctions $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_p(t)$. Désignons ses dérivées fonctionnelles par $X_1(t)$, $X_2(t)$, ..., $X_p(t)$. Considérons une équation aux dérivées fonctionnelles

$$\Phi|[x_1, x_2, \ldots, x_p; X_1, X_2, \ldots, X_p|U, \alpha]| = 0, \tag{22}$$

dont la forme dépend d'un paramètre α.

Le fait que l'on ait plusieurs fonctions arbitraires ne change rien à la théorie exposée n° 75. Pour chaque valeur de α, on a une équation dont l'intégration se ramène à celle des équations intégro-différentielles des caractéristiques. Ces équations s'écrivent

$$\left\{\begin{aligned} &\delta x_i(t) = \Phi'_{X_i}\, d\lambda \\ &\delta X_i(t) = -[\Phi'_{x_i} + X_i(t)\Phi'_U]\, d\lambda \qquad (i = 1, 2, \ldots, p), \\ &\delta U \quad = d\lambda \sum_i \int_0^1 X_i(t)\Phi'_{X_i}\, dt. \end{aligned}\right. \tag{23}$$

Considérons maintenant l'ensemble des équations (22) obtenues en faisant varier α dans un certain intervalle, et cherchons les intégrales U communes à toutes ces équations. Elles vérifient les conditions d'intégrabilité

$$[\Phi_1, \Phi_2] = 0, \tag{24}$$

obtenues en rapprochant les équations (22) deux à deux [1]; Φ_1 et Φ_2 désignent les déterminations de Φ correspondant à deux valeurs de α_1 et α_2.

On définit une multiplicité caractéristique $\mathfrak{M}$ comme l'ensemble des éléments $\mathcal{E}$ que l'on peut obtenir en partant d'un élément $\mathcal{E}_0$ et en décrivant des arcs finis ou infiniment petits des caractéristiques (23), chacun des arcs ainsi décrits correspondant à une valeur différente de α. En d'autres termes, un pareil déplacement sera défini par les équations (23), dans lesquelles on considère α et λ comme des fonctions

---

des caractéristiques, qui ne sont pas des équations quelconques, mais qui sont telles que les familles d'éléments qu'elles définissent aient une enveloppe; il en résulte que la connaissance d'une intégrale première permet d'abaisser de deux unités l'ordre du système. C'est là une circonstance de nature à faciliter l'intégration, quelle que soit la méthode employée.

[1] La parenthèse de Poisson, dans le cas correspondant à celui-là, a été formée par M. Volterra au Chapitre IV de ses *Leçons sur les fonctions de lignes*.

d'un même paramètre (α pouvant être discontinu; λ pouvant être tantôt croissant, tantôt décroissant).

80. Comme dans le cas de deux équations, il y a lieu de considérer d'abord le cas où la condition d'intégrabilité (24) résulte *analytiquement*, c'est-à-dire sans dérivation fonctionnelle de l'équation (22). Nous entendons par là qu'elle est vérifiée, quels que soient α_1 et α_2, pour tous les systèmes de déterminations de $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $X_p(t)$ et U vérifiant l'équation (22) [1].

Dans ce cas, les équations des caractéristiques sont aussi complètement intégrables, ce qui définit la généralité des multiplicités $\mathfrak{M}$. Un déplacement infinitésimal sur une telle multiplicité est une combinaison linéaire de ceux définis par les équations (23). En d'autres termes, pour chaque valeur de α, les équations (23) définissent une direction dans l'espace $E_{2p\omega+1}$ représentant $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $X_p(t)$, U. La variété linéaire la moins étendue contenant toutes les directions ainsi définies est la variété linéaire tangente à la variété Σ de l'espace $E_{2p\omega+1}$ qui correspond à la multiplicité $\mathfrak{M}$ de l'espace $E_{p\omega+1}$; si, se déplaçant sur Σ d'une manière quelconque, on revient au point de départ, on y revient tangentiellement à la variété considérée.

La généralité de la variété Σ, ou de la multiplicité correspondante M, est ainsi bien définie.

On peut obtenir un résultat plus précis si l'équation (22) peut être résolue par rapport à une dérivée fonctionnelle, par exemple X_p. Dans ce cas, on est dans un cas généralisant celui étudié au Chapitre IV dont les résultats, même si $p > 2$, s'appliquent sans difficulté; les éléments de chaque multiplicité $\mathfrak{M}$ dépendent de la fonction arbitraire $x_p(t)$. Dans le cas général, on peut évidemment dire qu'ils dépendent d'une fonction arbitraire de α, mais c'est moins précis et ne renseigne pas sur le fait de savoir si une des fonctions coordonnées $x_i(t)$ peut être choisie arbitrairement et détermine bien un élément; cela dépendra évidemment de l'intervalle de variation de α et aucune règle générale n'est possible (comparez aux considérations du Chapitre VII de la première Partie).

---

[1] Nous dirons de même qu'un système d'équations est résoluble analytiquement, que certaines fonctions peuvent s'éliminer analytiquement. Cela indiquera qu'il s'agit d'opérations de la théorie des fonctions, et qu'il n'y a à effectuer aucune dérivation fonctionnelle.

Les multiplicités $\mathfrak{M}$ une fois obtenues permettent l'intégration de l'équation étudiée dans les mêmes conditions que pour les autres types d'équations du premier ordre étudiées jusqu'ici.

81. Plaçons-nous maintenant dans le cas où l'équation (24) ne résulte pas analytiquement de l'équation (22). En considérant X_1, X_2, ..., X_p comme p fonctions nouvelles, et non comme des dérivées fonctionnelles d'une même fonctionnelle U, elle impose aux quantités x_1, x_2, ..., x_p, U des restrictions qui ne résultaient pas de l'équation (22).

En recommençant l'opération qui a conduit à cette opération, on peut obtenir une infinité de conditions nouvelles.

Elles sont en général incompatibles. Cette circonstance se produit en général dès que l'on a écrit l'équation (24), qui contient deux paramètres arbitraires α_1 et α_2, et qui suffirait pour déterminer une fonction de deux variables; il n'est donc pas possible en général de déterminer U et les fonctions $X_1(t)$, $X_2(t)$, ..., $X_p(t)$ d'une seule variable de manière à la vérifier.

Dans le cas où elles sont compatibles, il peut arriver qu'elles permettent l'élimination des $X_i(t)$ déterminant ainsi complètement U.

En dehors de ces cas, on arrive à un certain moment à un système complet, c'est-à-dire un certain système d'équations compatibles, ne permettant pas l'élimination des $X_i(t)$, et telles que les conditions d'intégrabilité obtenues en les rapprochant deux à deux n'impose aucune restriction nouvelle. On peut raisonner sur ce système comme sur l'équation (22) elle-même dans le cas du numéro précédent. Son intégration se ramène à la détermination des multiplicités caractéristiques $\mathfrak{M}$. Seulement elles sont plus étendues que dans le cas précédent. La variété linéaire tangente en chaque point à une de ces multiplicités est la plus petite variété linéaire comprenant, non seulement les directions définies par les équations (23), mais celles définies par les caractéristiques des équations (24) et des autres équations obtenues successivement.

82. Ce qui précède montre la possibilité de généraliser la méthode de Cauchy. Il est facile de voir comment se présente celle de Jacobi et Mayer.

Plaçons-nous dans le cas où le système, rendu complet, peut se

mettre sous la forme

$$(25)\qquad \begin{cases} \Phi_1 \,|\, [x_1, x_2, \ldots, x_p; X_1, X_2, \ldots, X_p \,|\, U, \alpha_1] \,| = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Phi_q \,|\, [x_1, x_2, \ldots, x_p; X_1, X_2, \ldots, X_p \,|\, U, \alpha_q] \,| = 0, \end{cases}$$

et supposons-le résoluble analytiquement par rapport à $X_1, X_2, \ldots, X_q$, de sorte que sa solution générale dépend d'une fonctionnelle arbitraire de $x_{q+1}, \ldots, x_p$.

Le principe de la méthode de Jacobi et Mayer consistera à adjoindre à ce système une équation de même forme

$$(26)\qquad \Phi_{q+1} \,|\, [x_1, x_2, \ldots, x_p; X_1, X_2, \ldots, X_p \,|\, U, \alpha_{q+1}] \,| = 0,$$

constituant avec les précédentes un système complet, et résoluble analytiquement par rapport à $X_1, X_2, \ldots, X_{q+1}$. La répétition du même procédé conduira à un système complet donnant toutes les dérivées fonctionnelles en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_p$ et U, c'est-à-dire à une intégration aux dérivées fonctionnelles ordinaires, dont l'intégration se ramène à celle d'une équation différentielle.

La détermination de la fonctionnelle Φ_{q+1} dépend du système linéaire

$$[\Phi_1, \Phi_{q+1}] = [\Phi_2, \Phi_{q+1}] = \ldots = [\Phi_q, \Phi_{q+1}] = 0.$$

L'intégration complète de ce système est aussi difficile que celle du proposé, puisqu'elle admet les mêmes caractéristiques. Mais il suffit d'en trouver une solution dépendant d'un paramètre; bien entendu ce paramètre α_{q+1} ne doit pas être une constante additive, puisque toutes les équations obtenues en le faisant varier doivent être vérifiées simultanément, et il faut ajouter une fonction arbitraire de α_{q+1} pour obtenir l'intégrale complète du système proposé. De plus, il faut que ce paramètre varie dans des limites suffisantes pour permettre la résolution par rapport à X_{q+1}.

Ce résultat obtenu, un nombre fini $p - q$ d'opérations analogues, dépendant de systèmes d'équations aux dérivées fonctionnelles ordinaires contenant chaque fois deux fonctions inconnues de moins, conduit à l'intégrale complète du système proposé. La méthode de Jacobi et Mayer se généralise donc plus aisément dans le cas considéré ici que dans celui considéré n° 78.

83. Généralisation. — Il ressort des considérations qui précèdent que toutes les théories relatives aux équations partielles du premier

ordre s'étendent sans peine au domaine fonctionnel. On peut aisément étendre ces résultats à des cas plus généraux encore en considérant une fonctionnelle U dépendant de p_0 paramètres, p_1 fonctions d'une variable, ..., p_m fonctions de m variables; en employant le langage des nombres transfinis, U serait une fonction de

$$p_0 + p_1 \omega + \ldots + p_m \omega^m$$

variables.

On peut supposer cette fonctionnelle assujettie à vérifier un système comprenant q_0 équations aux dérivées fonctionnelles partielles du premier ordre ne contenant aucun paramètre, q_1 équations contenant un paramètre, ..., q_n équations contenant n paramètres, c'est-à-dire un système de $q_0 + q_1 \omega + \ldots + q_n \omega^n$ équations.

Pour l'étude d'un pareil système, il y a lieu d'abord de former les conditions d'intégrabilité, en les rapprochant deux à deux et effectuant l'opération de Jacobi. Si elles ne sont pas identiquement vérifiées, et ne résultent pas analytiquement des équations initiales, on recommence la même opération, en tenant compte des nouvelles équations, et ainsi de suite. Il peut y avoir lieu de recommencer cette opération une infinité de fois (ce sera le cas général si $n = 0$).

On peut arriver ainsi à des équations incompatibles, ou bien à des équations permettant l'élimination, au point de vue analytique, des dérivées fonctionnelles, ce qui détermine U. En dehors de ces cas, on arrive à un certain système complet, formé d'équations compatibles, et telles que la condition d'intégrabilité ne donne aucune restriction nouvelle. Deux circonstances peuvent se présenter :

Ou bien ce système est analytiquement résoluble par rapport à l'ensemble des dérivées fonctionnelles. Il équivaut alors à une équation aux dérivées fonctionnelles ordinaires, qui se réduit à une équation différentielle si l'on fait varier les diverses fonctions dont dépend U suivant une loi déterminée;

Ou bien certaines dérivées fonctionnelles restent indéterminées. L'intégration du système se ramène alors par la méthode de Cauchy à l'intégration des équations des caractéristiques, c'est-à-dire à un système d'équations aux dérivées fonctionnelles, qui est réductible à un système d'équations différentielles ou intégro-différentielles.

De toute façon on est ramené à un problème d'analyse ordinaire, résultat qui ne s'étend pas aux équations d'ordres supérieurs au premier.

TROISIÈME PARTIE.

LA NOTION DE MOYENNE DANS LE DOMAINE FONCTIONNEL ET L'ÉQUATION DE LAPLACE GÉNÉRALISÉE.

CHAPITRE I.

LA SPHÈRE DANS L'ESPACE A n DIMENSIONS.

SOMMAIRE : Remarques générales. — I. *Le volume et la surface de la sphère :* Calcul d'une intégrale définie. — Ordre de grandeur de I_n. — Le volume de la sphère dans l'espace E_n. — La concentration près de la surface. — La concentration près de l'équateur. — Volume commun à un nombre fini de zones. — La surface de la sphère. — II. *Un problème de calcul des variations :* Énoncé du problème. — Un problème de géométrie plane. — Un problème de géométrie sphérique. — Généralisation.

1. **Remarques générales.** — Dans l'espace ordinaire, la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre n'apparaît pas du tout comme une simple extension des méthodes qui ont servi pour les équations du premier ordre, mais nécessite au contraire l'intervention de méthodes essentiellement nouvelles, correspondant à des problèmes aux limites nouveaux. Cela est en évidence surtout dans les équations du type elliptique, dont la plus simple est l'équation de Laplace.

La théorie de cette équation repose sur la formule de Green, c'est-à-dire sur l'emploi d'une notion, celle d'intégrale de volume, qui n'intervenait pas dans la théorie des équations du premier ordre. Elle joue au contraire un rôle fondamental lorsqu'on s'occupe d'équations du second ordre.

Si l'on cherche à étendre cette notion à l'espace fonctionnel, on constate d'abord que l'extension de la notion d'intégration n'est pas possible, la plupart des volumes étant nuls ou infinis. Mais on peut remplacer cette notion par celle de valeur moyenne, qui s'applique même dans ces volumes, et rend les mêmes services. Il est alors curieux de constater que cette notion, pour une raison qui sera mise en évidence dès le Chapitre suivant, se présente sous un aspect nouveau, plus simple que celui qu'elle présente dans l'espace à un nombre fini de dimensions. C'est à l'étude de cette notion que vont être consacrés plusieurs Chapitres. Nous étudierons ensuite l'équation de Laplace généralisée et quelques équations qui s'y rattachent, comme types d'équations du second ordre.

Pour éviter de rendre cet exposé trop abstrait, nous insisterons particulièrement sur la notion de valeur moyenne dans le cas de la sphère, où certains énoncés peuvent admettre plus de précision que dans le cas général. Certaines remarques sur la sphère dans l'espace E_n à n dimensions seront utiles comme introduction à cette étude. Rappelons que, comme nous l'avons vu à propos de la notion de distance, la sphère de rayon R de l'espace fonctionnel est la limite, non de la sphère de rayon R dans l'espace E_n, mais de la sphère de rayon $R\sqrt{n}$.

I. — LE VOLUME ET LA SURFACE DE LA SPHÈRE.

2. Calcul d'une intégrale définie. — Le volume de la sphère se déduit aisément de la valeur de l'intégrale définie

$$(1) \qquad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta \, d\theta.$$

Par une intégration par parties, on a, si $n > 1$,

$$\begin{aligned} I_n &= [\sin\theta \cos^{n-1}\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}\theta \sin^2\theta \, d\theta \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n), \end{aligned}$$

d'où

$$(2) \qquad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Cette formule de récurrence, et le calcul direct de I_0 et I_1, donnent les formules classiques

$$(3)\qquad \begin{cases} I_{2p} = \dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots(2p)}, \\ I_{2p+1} = \dfrac{2.4.6\ldots(2p)}{3.5.7\ldots(2p+1)}. \end{cases}$$

L'introduction des fonctions eulériennes permet de réunir ces formules en une formule unique, valable même si n n'est pas entier. Nous n'aurons pas besoin de cette formule. Remarquons seulement que, d'après celles que nous venons d'écrire, on a

$$I_{2p}\,I_{2p+1} = \frac{1}{2p+1}\,\frac{\pi}{2},$$

$$I_{2p+1}\,I_{2p} = \frac{1}{2p}\,\frac{\pi}{2},$$

et par suite, n étant un entier positif quelconque,

$$(4)\qquad I_n\,I_{n-1} = \frac{\pi}{2n}.$$

3. Ordre de grandeur de I_n. — De la formule de définition (1) résulte évidemment que I_n décroît quand n augmente. On a donc

$$I_n > I_{n+1} > I_{n+2},$$

et I_n, équivalent à I_{n+2} pour n infini, d'après la formule (2), est aussi équivalent à I_{n+1}. D'après la formule (4), on a donc

$$(5)\qquad I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Il est évident que les différentes parties de l'intervalle d'intégration de o à $\frac{\pi}{2}$ ne contribuent pas également, si n est grand, à la valeur de I_n. α étant un angle compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, on a évidemment

$$\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta\,dx < \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos^n\alpha.$$

Cette intégrale, si n est grand, est donc infiniment petite par rap-

port à I_n, de sorte que, quelque petit que soit α, l'intégrale de o à α est équivalente à I_n.

Pour avoir une fraction finie de I_n, il faut intégrer entre zéro et une limite supérieure tendant vers zéro avec n. Calculons

$$\int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{n}}} \cos^n \theta \, d\theta = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\alpha} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}} \, dx.$$

Or, entre o et α, $\cos^n \frac{x}{\sqrt{n}}$ tend uniformément, pour n infini, vers $e^{-\frac{x^2}{2}}$. L'intégrale considérée est donc équivalente à

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\alpha} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx.$$

On voit donc qu'elle représente bien une partie finie de I_n, fraction aussi voisine de l'unité que l'on veut si l'on a pris α assez grand.

4. **Le volume de la sphère dans l'espace E_n.** — Ce volume est évidemment de la forme

$$K_n R^n,$$

R étant le rayon de la sphère, et K_n le volume de la sphère de rayon 1. Pour calculer ce volume, décomposons-le en tranches par des plans parallèles; la distance d'un de ces plans au centre étant $\sin\theta$, la mesure de la section de la sphère par ce plan est $K_{n-1} \cos^{n-1} \theta$, de sorte que

$$K_n = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} K_{n-1} \cos^n \theta \, d\theta = 2 I_n K_{n-1}$$

et par suite

$$K_n = 4 I_n I_{n-1} K_{n-2},$$

ou, en tenant compte de la formule (4),

$$K_n = \frac{2\pi}{n} K_{n-2}. \tag{6}$$

De cette formule de récurrence et des valeurs connues de K_2 et K_3, on déduit

$$\left\{ \begin{aligned} K_{2p} &= \frac{\pi^p}{p!}, \\ K_{2p+1} &= \frac{2.(2\pi)^p}{1.3.5\ldots(2p+1)}. \end{aligned} \right. \tag{7}$$

On voit donc que le volume de la sphère de rayon R dans l'espace E_n tend vers zéro pour n infini, et que le volume de la sphère de rayon $R\sqrt{n}$ est équivalent, d'après la formule de Stirling [1], à

$$\frac{(2\pi e)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n\pi}} R^n.$$

Il devient donc nul ou infini suivant que R est inférieur ou égal à $\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$, ou au contraire supérieur à cette valeur.

5. La concentration près de la surface. — Considérons dans l'espace E_n deux sphères concentriques de rayon R et $R(1-\alpha)$, α étant compris entre 0 et 1. Leurs volumes sont dans le rapport des nombres

$$1, \quad (1-\alpha)^n.$$

Donc, quelque petit que soit α, le second est, pour n infini, infiniment petit comparé au premier; autrement dit, la région comprise entre les deux sphères concentriques a un volume équivalent à celui de la plus grande sphère. On peut exprimer ce fait en disant que, pour n très grand, le volume de la sphère se concentre près de sa surface.

Si l'on veut que la région comprise entre les deux sphères soit une fraction finie du volume total, il faut donc que la différence des deux rayons soit, non une fraction finie de R, mais une quantité infiniment petite. En prenant comme rayons R et $R\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)$, les volumes des deux sphères sont entre eux comme les nombres

$$1, \quad \left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^n$$

---

[1] On déduit en général cette formule de la théorie des fonctions eulériennes. Il nous paraît plus simple d'observer que la fonction

$$F(n) = \frac{n!\, e^n}{n^n \sqrt{n}}$$

a une limite, puisque $\log F(n+1) - \log F(n)$, équivalent pour n infini à $-\frac{1}{12n^2}$, est le terme général d'une série convergente. Cette limite se déduit alors immédiatement des formules (3) et (5) ou, ce qui revient au même, de la formule Wallis.

et à la limite, comme les nombres

$$1, \quad e^{-\alpha}.$$

La sphère intérieure comprend cette fois une fraction finie du volume total, mais on peut rendre cette fraction aussi petite que l'on veut en prenant α assez grand. Cela montre bien suivant quelle loi le volume de la sphère se concentre près de la surface.

6. **La concentration près de l'équateur.** — Considérons maintenant dans l'espace E_n la portion de la sphère de rayon R compris entre les plans

$$z = R \sin\theta_1, \qquad z = R \sin\theta_2,$$

z étant la distance à un plan passant par le centre de la sphère. Le volume total et la portion considérée, d'après le procédé qui a été employé n° 4 pour évaluer le volume de la sphère, sont entre eux comme les intégrales

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta \, d\theta, \qquad \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos^n\theta \, d\theta.$$

Si $\theta_1 < 0 < \theta_2$, quelque petites que soient les valeurs absolues de ces nombres, ces deux intégrales sont équivalentes pour n infini (n° 3), de sorte que tout le volume de la sphère se concentre pour n très grand dans une zone aussi mince que l'on veut, limitée par deux plans parallèles situés de part et d'autre du centre.

Si nous voulons que la zone considérée comprenne, lorsque n devient infini, une fraction restant finie du volume de la sphère, il faut que θ_1 et θ_2 tendent vers zéro. En prenant comme plans limites

$$z = R \sin\frac{\xi_1}{\sqrt{n}}, \qquad z = R \sin\frac{\xi_2}{\sqrt{n}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(8) \qquad z = \frac{R\xi_1}{\sqrt{n}}, \qquad z = \frac{R\xi_2}{\sqrt{n}},$$

on obtient un volume, dont le rapport au volume total tend, d'après

le n° 3, vers

$$(9) \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi_1}^{\xi_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Cette fraction est aussi voisine que l'on veut de l'unité, pourvu que ξ_1 et ξ_2 soient l'un négatif, l'autre positif, et tous deux suffisamment grands en valeur absolue.

Si, au lieu de la sphère de rayon R, on considère la sphère de rayon $R\sqrt{n}$, qui nous donnera à la limite une sphère de rayon R dans l'espace fonctionnel, on obtient évidemment le même résultant en considérant la zone d'épaisseur finie limitée par les plans

$$z = R\xi_1, \qquad z = R\xi_2.$$

7. Volume commun à un nombre fini de zones. — Considérons d'abord le cas d'un nombre fini p de zones, dont chacune est limitée par des plans parallèles situés de part et d'autre du centre à des distances de ce point égales à des fractions finies du rayon. En retranchant d'abord du volume de la sphère la région extérieure à la première zone, on ne retranche qu'une fraction infiniment petite du volume total; il en est de même quand on retranche successivement les régions extérieures aux autres zones. Donc le volume commun aux p zones considérées est, pour n infini, équivalent au volume total.

Il en est de même si l'on retranche en outre le volume intérieur à une sphère dont le rayon représente une fraction finie du rayon de la sphère étudiée.

On peut donc dire que le volume de la sphère se concentre tout entier, pour n infini, dans le voisinage de la zone comprenant les points communs à la surface et à p plans passant par le centre.

Considérons maintenant des zones d'épaisseurs infiniment petites par rapport aux rayons. Pour fixer les idées, nous prendrons la sphère de rayon infini $R\sqrt{n}$ et les zones d'épaisseur finie

$$(10) \qquad R\xi_i' < z_i < R\xi_i'' \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Nous allons montrer que la fraction du volume de la sphère comprise dans la région commune à ces zones, autrement dit la probabilité pour qu'un point intérieur à la sphère soit dans cette

région, a la valeur

$$(11)\qquad \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}}\int_{\xi_1'}^{\xi_1''} dx_1 \int_{\xi_2'}^{\xi_2''} dx_2 \ldots \int_{\xi_p'}^{\xi_p''} dx_p\, e^{-\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_p^2}{2}}.$$

Cette formule exprime que les variables z ont des lois de probabilités indépendantes. Pour la démontrer, il suffit de montrer que les conditions

$$(12)\qquad z_i = \mathrm{R}\,\xi_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p-1)$$

sont sans influence sur la loi de probabilité de z_p. En effet, ces équations, écrites dans l'espace à n dimensions, représentent un plan à $n-p+1$ dimensions, à une distance déterminée $r = k\mathrm{R}$ du centre de la sphère, égale, si les plans $z_i =$ const. sont perpendiculaires deux à deux, à

$$r = \mathrm{R}\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_p^2} = k\mathrm{R}.$$

La section de ce plan par la sphère du rayon $\mathrm{R}\sqrt{n}$ est une sphère de l'espace à $n-p+1$ dimensions et de rayon $\mathrm{R}\sqrt{n-k^2}$ équivalent à $\mathrm{R}\sqrt{n-p+1}$. Le nombre n, et par suite $n-p+1$, devenant infini, la loi de probabilité pour la coordonnée $z_p = \mathrm{R}\,\xi_p$ est bien celle qui résulte de la formule (9). Elle est donc bien indépendante des conditions (12).

8. **La surface de la sphère.** — Dans l'espace E_n, le volume de la sphère étant $\mathrm{K}_n\mathrm{R}^n$, sa surface est évidemment

$$\frac{d(\mathrm{K}_n\mathrm{R}^n)}{d\mathrm{R}} = n\mathrm{K}_n\mathrm{R}^{n-1}.$$

La surface de la sphère de rayon R tend donc vers zéro pour n infini, tandis que celle de la sphère de rayon $\mathrm{R}\sqrt{n}$ devient nulle ou infinie en même temps que le volume, sauf dans le cas limite où $\mathrm{R} = \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$. Dans ce cas, d'après le n° 4, le volume de la sphère est équivalent à $\frac{1}{\sqrt{n\pi}}$, de sorte que sa surface est équivalente à $\sqrt{\frac{n}{\pi}}$.

On peut évaluer directement la surface de la sphère en partant de la surface d'une zone. Le calcul est analogue à celui du n° 4, mais le rôle joué par l'intégrale I_n est joué ici par l'intégrale I_{n-1}. Il résulte

immédiatement de cette circonstance que la théorie de la concentration près de l'équateur, développée pour le volume de la sphère, s'applique sans modification pour la surface ([1]).

Il y a lieu de remarquer d'ailleurs que, étant établie pour le volume, la théorie en question est sûrement vraie pour la surface. En effet, ayant démontré que le volume de la sphère, si n est très grand, peut être confondu avec une erreur très petite avec celui d'une couronne sphérique très mince, cela revient au même de dire que le volume de la sphère est presque tout entier dans le volume commun à un nombre fini de zones très minces, ou d'énoncer le même résultat relatif à une couronne sphérique voisine de la surface, ou encore à la surface elle-même.

II. — UN PROBLÈME DE CALCUL DES VARIATIONS.

9. **Énoncé du problème.** — Au lieu de la section par un plan diamétral de la sphère de rayon R dans l'espace à n dimensions, considérons maintenant une variété C quelconque à $n-2$ dimensions, divisant la sphère en deux parties ayant même surface, et considérons la portion $\mathcal{R}$ de la surface formée de points situés à une distance de la variété C au plus égale à $R\theta$ (la distance de deux points de la sphère étant comptée sur le grand cercle passant par ces points). Nous montrerons que *la surface de la région* $\mathcal{R}$, pour des valeurs données de n, R et θ, *est minima lorsque la variété* C *se réduit à la section de la sphère par un plan contenant le centre.* Il en résultera que ce qui a été dit sur la concentration près de l'équateur est vrai *a fortiori* pour la concentration près de la variété C. La région de la sphère extérieure à $\mathcal{R}$ représente une fraction de la surface totale à laquelle on peut assigner une limite supérieure, fonction de θ et n seulement, et tendant vers zéro lorsque n devient infini, θ restant fixe.

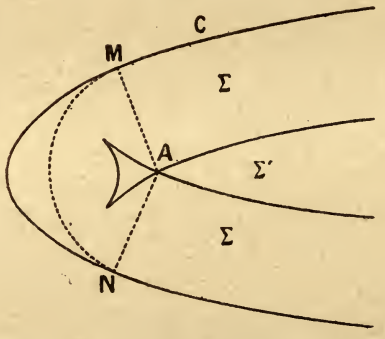
Le problème de calcul de variations d'où résultent ces conséquences est une généralisation du problème classique consistant à déterminer la surface d'aire minima limitant un volume donné. Nous allons commencer par quelques cas simples.

([1]) *Voir* sur ce sujet E. Borel, *Introduction géométrique à quelques théories physiques.*

10. **Un problème de géométrie plane.** — Considérons une courbe plane fermée sans point double C. Appelons l sa longueur, S l'aire intérieure à C, et Σ l'aire de la région lieu des points intérieurs à C et dont la distance à cette courbe ne dépasse pas une longueur donnée a. Cherchons pour quelle courbe Σ est minimum si a et S sont donnés (S étant supérieur à πa^2).

Observons d'abord que la courbe C qui réalise le minimum ne peut avoir nulle part son rayon de courbure inférieur à a [1]. Si en effet le rayon de courbure est quelque part inférieur à a, la région Σ' comprenant les points de S n'appartenant pas à Σ est limitée, non par la courbe C′ parallèle à C à la distance a, mais par une portion seulement de cette courbe, dont certains arcs sont intérieurs à Σ. A ces arcs correspondent des arcs de C situés à une distance de Σ' supérieure à a. Appelons alors S_1 l'aire de la région comprenant Σ' et les points situés à une distance de Σ' au plus égale à a. Cette région est limitée par des arcs de C et des arcs de cercles de rayon a ayant pour centre les points doubles de C′, tels que l'arc MN, de centre A, de la figure ci-dessous (*fig.* 2). En remplaçant S par S_1, on diminue

Fig. 2.



les aires S et Σ sans changer leur différence, qui est l'aire de Σ'. Remplaçant alors la figure par une figure semblable et plus grande, on peut remplacer S_1 par une aire égale à S, en remplaçant Σ' par une aire plus grande et par suite $\Sigma = S - \Sigma'$ par une aire plus petite.

---

[1] Nous supposons l'existence du rayon de courbure. On sait que les difficultés augmentent beaucoup, dès le cas du plan, si l'on veut une démonstration tout à fait générale, et l'extension au cas de la sphère de l'espace E_n de cette démonstration nécessiterait des développements beaucoup plus étendus que ceux qui suivent.

La courbe considérée ne réalise pas le minimum. Celle qui réalise le minimum de Σ a donc son rayon de courbure toujours au moins égal à a.

Pour cette courbe, l'aire Σ peut alors être considérée comme balayée par un segment de longueur a normal à C. Lorsque l'extrémité de segment décrit un arc ds de C, ce segment décrit une aire

$$a\,ds - \frac{a^2}{2}k\,ds, \tag{13}$$

k étant la courbure, comptée positivement vers l'intérieur. Observant que $k\,ds$ est l'angle de contingence de la courbe C, dont l'intégrale est 2π, on trouve en intégrant

$$\Sigma = al - \pi a^2. \tag{14}$$

Σ est donc minimum en même temps que l, c'est-à-dire lorsque C est une circonférence.

11. Un problème de géométrie sphérique. — On peut se poser un problème analogue au précédent sur la surface d'une sphère de rayon 1 dans l'espace à trois dimensions. Parmi les courbes C tracées sur cette sphère et entourant une aire ayant une valeur donnée S, quelle est celle qui rend minima l'aire Σ de la région $\mathfrak{R}$ lieu des points de l'aire S dont la distance à C (comptée sur la sphère) ne dépasse pas une longueur donnée a.

Le principe du raisonnement précédent s'applique sans modification. L'expression de l'aire élémentaire (13) doit seulement être remplacée par

$$ds \sin a - (1 - \cos a)k\,ds, \tag{15}$$

k désignant la courbure *géodésique* de la courbe C, dont l'intégrale sur la courbe C a la valeur

$$2\pi - S$$

(d'après une formule que l'on démontre aisément en remplaçant la courbe C par un polygone sphérique de côtés très petits, en décomposant ce polygone en triangle et en appliquant à chaque triangle le théorème de l'*excès sphérique*).

En intégrant l'expression (15), il vient alors, pour l'aire de la

région $\mathcal{R}$,

$$\Sigma = l \sin a - (1 - \cos a)(2\pi - S), \tag{16}$$

ce qui montre que, S et a étant donnés, Σ est minimum en même temps que l, c'est-à-dire lorsque C est une circonférence.

Si en particulier $S = 2\pi$, c'est-à-dire si C est une courbe divisant la sphère en deux aires égales, le minimum de Σ est réalisé si C est un grand cercle. Ce cercle réalise le minimum des aires comprises entre C et les courbes parallèles tracées à une distance a d'*un côté ou de l'autre de* C, et par suite le minimum de la somme de ces deux aires, c'est-à-dire de l'aire balayée par des cercles de rayon sphérique a dont les centres décrivent la courbe C.

12. Généralisation. — Les résultats précédents s'étendent à l'espace à $n - 1$ dimensions et à la sphère de l'espace à n dimensions. Mais leur démonstration, par une méthode analogue à la précédente, présente une difficulté provenant de ce que les formules (14) doivent être remplacées par des formules de degrés plus élevés en a dont les coefficients ne s'expriment pas en fonction de l et S seulement.

Il vaut mieux raisonner comme suit :

Soit, sur la surface de la sphère de rayon R dans l'espace à n dimensions, une variété C à $n - 2$ dimensions, de mesure L, limitant une aire sphérique S. Si S est donné, on sait que L atteint son minimum l lorsque C se réduit à une section plane C′ et dans ce cas seulement.

Soient $\mathcal{R}_a$ le lieu des points de l'aire S limitée par une variété non plane C et situés à une distance sphérique de C ne dépassant pas une valeur donnée $a = \theta R$, et $\mathcal{R}'_a$ l'aire analogue définie en partant de C′. Appelons Σ_a et Σ'_a les aires de $\mathcal{R}_a$ et $\mathcal{R}'_a$, et L_a et L'_a les mesures des variétés parallèles à C et C′ limitant ces aires. On a évidemment

$$\frac{d\Sigma_a}{da} = L_a, \qquad \frac{d\Sigma'_a}{da} = L'_a,$$

$$\Sigma_0 = \Sigma'_0 = 0, \qquad L_0 = L > L'_0 = l,$$

et par suite, pour a positif très petit,

$$\Sigma_a > \Sigma'_a. \tag{17}$$

Je dis que cette inégalité reste vérifiée pour toutes les valeurs de a,

jusqu'à ce que Σ'_a s'annule. Pour cela, nous allons voir que l'hypothèse qu'elle cesse d'être vérifiée pour $a = b$ conduit à une contradiction.

Le premier membre de (17), d'abord supérieur au second, lui devenant égal, on aurait

$$\frac{d\Sigma_b}{db} \leqq \frac{d\Sigma'_b}{db},$$

c'est-à-dire

$$L_b \leqq L'_b. \tag{18}$$

Or ces variétés limitent des aires égales entre elles, de valeur

$$S - \Sigma_b = S - \Sigma'_b.$$

Nous savons que dans ces conditions leur mesure ne peut atteindre son minimum que si elles sont planes, ce qui est le cas pour L'_b et non pour L_b. L'inégalité (18) n'est donc pas possible, et par suite l'inégalité (17) est vérifiée pour toutes les valeurs de a ou, ce qui revient au même, de θ.

On en déduit, comme au n° 11, que de toutes les variétés C qui divisent la sphère en deux aires égales, celle qui rend minima l'aire Σ de la région $\mathcal{R}$ balayée par une calotte sphérique de demi-angle au sommet θ, dont le centre décrit C, est une section plane passant par le centre.

Si l'angle θ reste fini, le nombre de dimensions n devenant infini, le minimum en question de Σ, et par suite la valeur de Σ pour une variété quelconque divisant la sphère en deux aires égales, représente (d'après le n° 6) une fraction de la surface totale de la sphère qui tend vers l'unité. En d'autres termes, la portion de l'aire sphérique n'appartenant pas à la région $\mathcal{R}$ représente une fraction infiniment petite de l'aire totale.

CHAPITRE II.

LA NOTION DE VALEUR MOYENNE DANS L'ESPACE FONCTIONNEL.

SOMMAIRE : Remarques générales. — La notion de valeur moyenne. — Énoncé d'un théorème général. — Exemples de valeurs moyennes à l'intérieur d'une sphère. — Démonstration du théorème général dans le cas d'une fonctionnelle uniformément continue à l'intérieur d'une sphère. — Les formules de Gateaux pour la sphère. — Postulat de l'existence de la moyenne. — Remarques. — Application aux fonctionnelles du second degré. — La notion de courbure moyenne. — Surfaces minima. — Exemples de valeurs moyennes dans des volumes autres que la sphère.

13. Remarques générales. — Les notions d'intégrale et de valeur moyenne n'ayant *a priori* aucun sens dans l'espace fonctionnel, nous devons, pour leur en attribuer un, appliquer le procédé du passage du fini à l'infini dont nous avons fait déjà un fréquent usage dans la première partie de notre étude.

Une fonction déterminée $x(t)$, définie entre 0 et 1, peut être approchée en moyenne autant qu'on veut par ce que nous appellerons, avec R. Gateaux, une *fonction simple d'ordre n*, c'est-à-dire une fonction ayant une valeur constante dans chacun des intervalles

$$\left(0, \frac{1}{n}\right), \quad \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \quad \ldots, \quad \left(\frac{n-1}{n}, 1\right),$$

pourvu que l'on prenne n assez grand. Nous appellerons $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les valeurs respectivement prises par une fonction simple d'ordre n dans ces n intervalles. Une telle fonction est représentée par le point de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans l'espace E_n à n dimensions.

Soit maintenant un volume V de l'espace fonctionnel; pour fixer les idées, nous prendrons le volume intérieur à la sphère

$$(1) \qquad \int_0^1 x^2(t)\,dt = R^2.$$

Les fonctions simples d'ordre n appartenant à ce domaine constituent dans l'espace E_n un volume V_n que nous appellerons la $n^{ième}$ *section* du volume V. Dans l'exemple choisi, V_n est le volume de la sphère

$$(2) \qquad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = n R^2.$$

Si l'on veut mesurer le volume V, sa mesure doit être définie comme la limite de celle de V_n pour n infini. Dans l'exemple choisi, en vertu des résultats du n° 4, cette limite est nulle ou infinie suivant la valeur de R.

Cette circonstance est très générale. *La mesure d'un volume de l'espace fonctionnel sera presque toujours nulle ou infinie.*

Considérons, pour préciser cet énoncé, deux volumes homothétiques par rapport à l'origine dans le rapport $k > 1$, c'est-à-dire tels qu'on passe d'une fonction quelconque $x(t)$ du premier volume à une fonction quelconque $X(t)$ du second par la transformation

$$X(t) = k\,x(t).$$

Leurs $n^{ièmes}$ sections sont des volumes homothétiques dans l'espace E_n; le rapport d'homothétie étant k, le rapport des volumes est k^n et devient infini avec n. Il en résulte que, parmi tous les volumes de l'espace fonctionnel homothétiques d'un volume donné par rapport à l'origine, il en existe au plus un dont la mesure ne soit ni nulle, ni infinie. Encore ce volume peut-il ne pas exister, comme nous l'avons vu par l'exemple de la sphère.

14. La notion de valeur moyenne. — D'après ce qui précède, l'extension des notions de volume ou d'intégrale de volume dans l'espace fonctionnel présente une difficulté fondamentale. Nous reviendrons plus loin sur ces notions. Il est souvent avantageux de leur substituer la notion de valeur moyenne, qui conserve un sens bien défini.

Considérons une fonctionnelle définie et continue dans le volume V. Elle sera évidemment définie et continue dans V_n et y admettra une valeur moyenne μ_n. Pour n infini, cette valeur peut tendre vers une limite, qui sera alors par définition la *valeur moyenne* de la fonctionnelle considérée dans V.

Considérons, par exemple, une fonctionnelle de la forme $\varphi(r)$,

r désignant la distance à l'origine définie par la formule

$$\int_0^1 x^2(t)\,dt = r^2,$$

et $\varphi(r)$ une fonction continue, et cherchons sa valeur moyenne à l'intérieur de la sphère (1).

Dans V_n, on a évidemment

$$\mu_n = \frac{\int_0^R \varphi(r)\, r^{n-1}\, dr}{\int_0^R r^{n-1}\, dr},$$

la couronne sphérique dans laquelle la distance au centre varie de r à $r + dr$ ayant un volume proportionnel à $r^{n-1}\,dr$. Pour n infini, la couronne extérieure l'emporte sur les autres, qui deviennent négligeables vis-à-vis d'elle, et l'on a comme limite de μ_n la valeur $\varphi(R)$.

Ainsi la moyenne de la fonctionnelle $\varphi(r)$ n'apparaît pas comme une véritable moyenne entre différentes valeurs ayant chacune un poids appréciable. Une seule valeur l'emporte sur toutes les autres, et, quelque petit que soit ε, le volume dans lequel $\varphi(r)$ diffère de cette valeur de plus de ε a une *mesure nulle* par rapport à celle du reste du volume V. Il n'y a pas lieu, dans le calcul de la moyenne, de tenir compte des valeurs de $\varphi(r)$ dans ce volume, de même que dans le calcul d'une intégrale (simple ou double), au sens de M. Lebesgue, il n'y a pas lieu de tenir compte des valeurs de la fonction intégrée pour les points d'un ensemble de mesure (linéaire ou superficielle) nulle.

15. **Énoncé d'un théorème général.** — Une généralisation évidente de ce qui précède nous montre que, pour calculer la valeur moyenne d'une fonctionnelle continue à l'intérieur de la sphère (1), il suffit de connaître sa valeur à la surface de cette sphère. Mais on peut obtenir un résultat bien plus général.

Soit à chercher la moyenne d'une fonctionnelle continue U dans un volume V. Dans la $n^{\text{ième}}$ section de ce volume, U est continue; les points de ce volume V_n pour lesquels U est compris entre a et $a + da$ forment un volume dont une seule dimension est infiniment petite, de sorte qu'il est naturel de désigner sa mesure

par $f_n^{n-1}(a)\,da$. Il arrivera, en général, que, pour n infini, le rapport $\frac{f_n(a)}{f_n(a_0)}$ (a_0 étant une valeur particulière de a) tende vers une fonction déterminée $g(a)$. Si cette fonction admet un maximum atteint pour une seule valeur b de a, le volume dans lequel U est compris entre $b-\varepsilon$ et $b+\varepsilon$ l'emporte infiniment sur le reste du volume V, quelque petit que soit ε. La fonctionnelle U est donc presque égale à b, sauf dans une fraction négligeable du volume, dont il n'y a pas lieu de tenir compte pour le calcul de la moyenne.

On voit donc que, moyennant certaines conditions sans doute très peu restrictives, *une fonctionnelle continue dans un volume* V *y a presque partout presque la même valeur, les valeurs différentes de celle ainsi considérée pouvant être négligées pour le calcul de la moyenne.*

Nous démontrerons ce théorème d'une manière précise dans des cas étendus. Il nous arrivera, au lieu de « presque partout presque la même valeur », de dire « presque partout la même valeur ». Il est bien entendu que l'égalité rigoureuse n'est réalisée que sur une surface qu'on ne peut considérer comme constituant presque tout le volume; c'est le voisinage immédiat de cette surface qui constitue presque tout le volume.

16. Exemples de valeurs moyennes à l'intérieur d'une sphère. — Soit à chercher la moyenne, à l'intérieur de la sphère (1), d'une fonctionnelle de la forme $\varphi(\mathrm{U})$, U désignant une fonctionnelle linéaire.

Supposons d'abord cette fonctionnelle *continue*. Elle sera, d'après la formule de M. Fréchet (première Partie, n° 43), de la forme

$$\mathrm{U}=\int_0^1 f(t)\,x(t)\,dt.$$

Si $x(t)$ est une fonction simple d'ordre n, U se réduit à la forme

$$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\ldots+\alpha_n x_n,$$

avec

$$\alpha_i=\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(t)\,dt \qquad (i=1,2,\ldots,n);$$

U est donc la distance p à un plan passant par l'origine du point représentatif de $x(t)$ dans l'espace E_n, multipliée par le facteur

$$\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2} = \frac{k_n}{\sqrt{n}},$$

k_n tendant vers le nombre k défini par

$$k^2 = \int_0^1 f^2(t)\,dt.$$

La moyenne μ_n est donc la moyenne de $\varphi\left(\frac{pk_n}{\sqrt{n}}\right)$ à l'intérieur de la sphère (2) de rayon $R\sqrt{n}$, ou, ce qui revient au même, la moyenne de $\varphi(pk_n)$ à l'intérieur de la sphère de rayon R. Le facteur k_n étant fini, et p étant inférieur en valeur absolue à n'importe quel nombre donné ε, sauf dans une fraction de cette sphère négligeable si n est assez grand, on peut dire que $U = pk_n$ est nul presque partout, et la valeur moyenne de $\varphi(U)$ est $\varphi(0)$. Le théorème du numéro précédent s'applique.

Supposons, au contraire, que U ne soit pas une fonctionnelle continue. Prenons, par exemple, une fonctionnelle de la forme $x(\tau)$, τ étant une valeur particulière de t entre 0 et 1. Si $x(t)$ est une fonction simple d'ordre n, U est alors la distance à un plan de l'espace E_n, de sorte que le facteur infiniment petit $\frac{k_n}{\sqrt{n}}$ qui intervenait précédemment est remplacé par 1. D'après le n° 6, la probabilité pour que U soit compris entre $R\xi_1$ et $R\xi_2$, le point représentatif de $x(t)$ étant intérieur à la sphère de rayon $R\sqrt{n}$, tend pour n infini vers

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi_1}^{\xi_2} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\,d\xi,$$

de sorte que la valeur moyenne μ_n de $\varphi(U)$ dans cette sphère tend, pour n infini, vers

$$(3) \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(R\xi)\,e^{-\frac{\xi^2}{2}}\,d\xi.$$

La moyenne de $\varphi(U)$ est ici une véritable moyenne, dans le calcul de laquelle il y a lieu de tenir compte de toutes les valeurs de la fonction φ, affectées chacune d'un poids convenable. Le théorème du n° 15 ne s'applique plus. On peut dès lors prévoir que, pour la

démonstration de ce théorème, l'hypothèse que la fonctionnelle considérée soit continue doit jouer un rôle essentiel.

17. Démonstration du théorème général dans le cas d'une fonctionnelle uniformément continue à l'intérieur d'une sphère. — Soit U une fonctionnelle uniformément continue à l'intérieur de la sphère (1). Quelque petit que soit ε positif, on peut alors trouver un nombre η tel que, deux points de l'espace fonctionnel intérieurs à cette sphère ayant une distance inférieure à η, les valeurs correspondantes de U diffèrent certainement de moins de ε.

Dans l'espace E_n, U se réduit à une fonction u_n continue sur la sphère (2). Considérons les points de la surface de cette sphère vérifiant l'inégalité

$$U < \alpha.$$

Ils constituent une portion de la surface dont la mesure, nulle pour α suffisamment petit, croît et atteint ou dépasse la moitié de la surface totale quand α atteint ou dépasse une valeur bien déterminée α_n. La variété $U = \alpha_n$ (ou si $U = \alpha_n$ sur une fraction finie de la surface totale, une variété convenable formée de points pour lesquels $U = \alpha_n$) divise la surface de la sphère en deux parties égales.

Considérons les points de la surface de la sphère (2) distants de moins de $\eta\sqrt{\frac{n}{2}}$ des points de cette variété. Ils forment une région Σ_n qui, d'après le n° 12, représente une fraction de la surface totale qui tend vers l'unité pour n infini. Considérons ensuite les points intérieurs à la sphère, situés sur des rayons aboutissant sur Σ_n, et à une distance de la surface inférieure à $\eta\sqrt{\frac{n}{2}}$. Ils forment un volume V_n qui représente une fraction du volume total de la sphère qui tend vers l'unité pour n infini.

Or un point M de ce volume est évidemment distant de moins de $\eta\sqrt{n}$ d'un point A de la variété $U = \alpha_n$. Les points correspondants de l'espace fonctionnel sont alors distants de moins de η, et les valeurs correspondantes de U diffèrent de moins de ε. U est donc compris entre $\alpha_n - \varepsilon$ et $\alpha_n + \varepsilon$, sauf dans un volume qui, pour n suffisamment grand, ne représente qu'une fraction infiniment petite du volume de la sphère. Comme d'ailleurs U est fini dans ce volume, la moyenne μ_n de U dans la sphère (2) diffère de α_n d'une quantité qui tend vers zéro pour n infini.

Admettant que μ_n tende vers une limite μ, c'est-à-dire que la valeur moyenne de U dans la sphère (1) existe, α_n tend nécessairement vers la même limite, et nous voyons que μ doit être considéré comme la moyenne de U parce que U diffère très peu de μ, sauf dans une région dont le volume est négligeable à la limite. Nous sommes dans un cas d'application du théorème général du n° 15.

Donc, *dans le cas d'une fonctionnelle uniformément continue à l'intérieur d'une sphère de l'espace fonctionnel*, ou bien la valeur moyenne n'existe pas (circonstance dont le raisonnement très simple qui précède ne suffit pas à exclure la possibilité), ou bien *la fonctionnelle est presque partout égale à sa valeur moyenne.*

L'énoncé reste évidemment vrai, et même la démonstration se simplifie un peu si, au lieu du volume d'une sphère, on considère sa surface. Cela revient d'ailleurs au même, puisque tout le volume est concentré sur sa surface.

18. Les formules de Gateaux pour la sphère. — Il reste, pour compléter le résultat précédent, à démontrer l'existence de la valeur moyenne, à l'intérieur de la sphère (1), d'une fonctionnelle continue, et à en former l'expression. Nous allons, avec R. Gateaux [1], former cette expression dans le cas d'une fonctionnelle de la forme

$$(4)\qquad U = \int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \ldots \int_0^1 dt_p\, \varphi[x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_p), t_1, t_2, \ldots, t_p].$$

Cherchons d'abord la moyenne de la fonctionnelle

$$(5)\qquad \varphi[x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_p)],$$

$t_1, t_2, \ldots, t_p$ étant des valeurs particulières de t entre 0 et 1. Si $p = 1$, cette valeur moyenne sera, d'après la formule (3),

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(R\xi)\, e^{-\frac{\xi^2}{2}}\, d\xi.$$

Si $p > 1$, le raisonnement qui nous a conduit à cette formule s'applique sans difficulté, si $t_1, t_2, \ldots, t_p$ sont distincts. Les quantités $x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_p)$ ayant dans ce cas des lois de probabi-

---

[1] *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1919.

lités indépendantes, on trouve pour moyenne de la fonctionnelle (5)

$$(6)\qquad \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots \times\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(R\xi_1, R\xi_2, \ldots, R\xi_p)\, e^{-\frac{\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_p^2}{2}}\, d\xi_1\, d\xi_2\ldots d\xi_p.$$

Supposons maintenant que $t_1, t_2, \ldots, t_p$ varient. En intégrant l'expression (5), et supposant que la forme de la fonction φ varie avec $t_1, t_2, \ldots, t_p$, on obtient la fonctionnelle (4). Dans le champ d'intégration, les points pour lesquels deux au moins des t sont égaux peuvent être négligés. Pour les autres, la fonction φ ayant pour moyenne la valeur (6), on en déduit sans difficulté la moyenne de l'expression (4), qui est

$$(7)\qquad \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}}\int_0^1 dt_1\ldots\int_0^1 dt_p\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1\ldots \times\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_p\,\varphi(R\xi_1, \ldots, R\xi_p, t_1, \ldots, t_p)\, e^{-\frac{\xi_1^2+\ldots+\xi_p^2}{2}}.$$

Telles sont les formules de Gateaux.

Une formule analogue à la précédente s'applique évidemment si, au lieu d'intégrer la fonction φ dans toute la région de l'espace E_p décrite par le point $t_1, t_2, \ldots, t_p$, ce qui donne la fonctionnelle (4), on intègre sur certaines variétés de ce volume. Si aucune portion finie de ces variétés n'est constituée de points pour lesquels deux au moins des t sont égaux, une formule analogue à la formule (7) s'écrit sans difficulté. Si au contraire on a par exemple dans le champ d'intégration $t_p = t_{p-1}$, les autres t étant distincts entre eux et distincts de t_p, on posera

$$\varphi[x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_{p-1}), x(t_p)] = \psi[x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_{p-1})],$$

et la formule (7) s'applique sans difficulté à la fonction ψ.

On passe de là sans difficulté aux fonctionnelles représentables par des séries uniformément convergentes de fonctionnelles des types considérés, et l'on obtient ainsi la moyenne, sinon de toutes les fonctionnelles continues à l'intérieur de la sphère (1), du moins d'une catégorie très générale et comprenant sans doute toutes les fonctionnelles intéressantes au point de vue pratique.

19. Existence de la moyenne. — Si la propriété de la moyenne établie n° 17 est relativement aisée à démontrer, si cette moyenne existe, l'existence même de cette moyenne soulève des difficultés plus sérieuses. Il n'est pas évident, si une fonctionnelle est continue dans un volume, que sa moyenne dans la $n^{\text{ième}}$ section de ce volume ait une limite pour n infini. On peut donc se proposer d'établir une justification de la notion de moyenne, en faisant simplement des hypothèses relatives à la continuité de la fonctionnelle étudiée.

Deux voies sont possibles. D'une part on peut établir une justification directe, basée sur des raisonnements analogues à ceux par lesquels on démontre l'existence des intégrales définies. D'autre part on peut, en partant des mêmes hypothèses, obtenir une représentation de la fonctionnelle étudiée par des séries uniformément convergentes de termes dont les moyennes se calculent par les formules du numéro précédent.

Nous reviendrons sur ces questions dans le dernier Chapitre. Pour le moment, contentons-nous d'admettre les propositions suivantes, *dans le cas de la sphère :*

1° Convergence de m_n, moyenne d'une fonctionnelle U dans la $n^{\text{ième}}$ section de la sphère, vers une limite m, moyennant une condition de continuité convenable imposée à U ;

2° Uniformité de la convergence de m_n vers m, pour une famille de fonctionnelles vérifiant *également* cette condition de continuité.

Les mêmes questions se posent évidemment pour une surface quelconque. Mais, pour la principale application que nous avons en vue (problème de Dirichlet relatif à une surface quelconque), il suffit d'admettre les propositions précédentes dans le cas de la sphère.

20. Remarques. — Les formules du n° 18 nous montrent que la valeur moyenne des fonctionnelles considérées est la même que si, dans l'espace E_n, au lieu de prendre la valeur moyenne dans la sphère (2), nous avions pris la valeur moyenne dans tout l'espace, en affectant chaque élément de volume infiniment petit dV du poids

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2}{2}} dV, \tag{8}$$

$x_1 = R\xi_1, \ldots, x_n = R\xi_n$ étant les coordonnées d'un point intérieur

à cet élément, autrement dit en admettant que la probabilité pour que x_i soit compris entre x et $x + dx$ est

$$(8\ bis) \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2R^2}} \frac{dx}{R},$$

les lois de probabilité de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant indépendantes.

Il est facile, en partant de cette définition, de retrouver le rôle joué par la sphère (2) et, à la limite, par la sphère (1). En effet, d'après cette loi de probabilité, chacune des quantités $x_1, x_2, \ldots, x_p$ a pour valeur quadratique moyenne R; il en est donc de même de

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2}{n}},$$

et de plus, d'après la *loi des grands nombres*, la probabilité pour que cette quantité ne soit pas comprise entre $R - \varepsilon$ et $R + \varepsilon$, ε étant un nombre positif quelconque, tend vers zéro lorsque p devient infini. En d'autres termes, les portions de l'espace dont il y a lieu de tenir compte pour le calcul de la moyenne se concentrent près de la surface d'une sphère de rayon $R\sqrt{n}$, qui devient à la limite la sphère (1) de l'espace fonctionnel. La moyenne, au sens que nous venons d'indiquer, d'une fonctionnelle uniformément continue dans le voisinage de cette sphère et finie dans tout l'espace, ne dépend donc que de ses valeurs sur la surface de la sphère.

D'autre part, le poids à attribuer à chaque élément de volume pour le calcul de la moyenne étant, d'après la formule (8), fonction de sa distance au centre, les poids attribués aux régions de l'espace intérieures à deux cônes ayant le centre pour sommet sont dans le même rapport que les surfaces des régions de la sphère (1) comprises dans ces deux cônes.

La moyenne, calculée en tenant compte des poids définis par la formule (8), n'est donc autre pour n infini que la moyenne de la fonctionnelle sur la surface de la sphère (1), ce qui donne une nouvelle démonstration des formules de Gateaux (pour la surface de la sphère, et par suite aussi pour le volume).

21. Le raisonnement précédent met en évidence un phénomène de concentration sur la surface de la sphère (2) analogue à celui que nous avons déjà observé en étudiant le volume de la sphère. Il n'est

pas sans intérêt de comparer les lois qui régissent ces deux phénomènes.

D'après la formule (8), la probabilité pour que la distance au centre d'un point de l'espace E_n soit comprise entre $R\rho$ et $R(\rho + d\rho)$ est

$$\frac{n K_n \rho^{n-1} d\rho}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\rho^2}{2}},$$

$n K_n$ étant la surface de la sphère de rayon 1.

Si nous posons

$$\rho = \sqrt{n}\left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n} + \alpha$$

et prenons θ comme variable au lieu de ρ, la probabilité précédente devient

$$\frac{n K_n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} n^{\frac{n-1}{2}} \left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)^{n-1} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{n}+\alpha)^2} d\alpha.$$

En tenant compte de la valeur asymptotique de K_n (n° 4), on trouve que cette probabilité est équivalente, pour n infini, à

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

La probabilité, avec la loi de probabilité considérée, pour que la distance $R\rho$ à l'origine d'un point de l'espace E_n soit comprise entre $R\sqrt{n}\left(1 + \frac{\alpha_1}{\sqrt{n}}\right)$ et $R\sqrt{n}\left(1 + \frac{\alpha_2}{\sqrt{n}}\right)$, tend donc vers

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

quantité aussi voisine de 1 qu'on le veut si α_1 est assez grand négativement et α_2 assez grand positivement.

Si nous considérions toutes les parties de l'espace E_n comme ayant des poids proportionnels à leur volume, mais ne considérions que les points intérieurs à la sphère de rayon $R\sqrt{n}$, il faudrait, pour avoir une probabilité finie, chercher la probabilité pour que la distance au centre soit comprise entre $R\sqrt{n}\left(1 - \frac{\alpha_2}{n}\right)$ et $R\sqrt{n}\left(1 - \frac{\alpha_1}{n}\right)$, α_1 et α_2

étant positifs, et cette probabilité serait (n° 5)

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} e^{-\alpha}\, d\alpha = e^{-\alpha_1} - e^{-\alpha_2}.$$

22. Application aux fonctionnelles entières du second degré. — La moyenne dans une sphère d'une fonctionnelle linéaire étant évidemment, par raison de symétrie, égale à sa valeur au centre, nous n'avons qu'à nous occuper des fonctionnelles homogènes.

Considérons d'abord la fonctionnelle normale

$$(9) \qquad U = \int_0^1 f(t) x^2(t)\, dt + \int_0^1 \int_0^1 \varphi(t, t_1)\, x(t)\, x(t_1)\, dt\, dt_1.$$

Les formules de Gateaux nous donnent, comme valeur moyenne de l'intégrale double dans la sphère (1) :

$$\frac{R^2}{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 \varphi(t, t_1)\, dt\, dt_1 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \xi\, e^{-\frac{\xi^2}{2}}\, d\xi \right]^2 = 0.$$

Pour l'intégrale simple, on a de même

$$\frac{R^2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 f(t)\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 e^{-\frac{\xi^2}{2}}\, d\xi = R^2 \int_0^1 f(t)\, dt.$$

On trouve donc, comme moyenne de la fonctionnelle (9), la valeur

$$(10) \qquad R_2 \int_0^1 f(t)\, dt = \frac{R^2}{2} \Delta U.$$

Plaçons-nous maintenant dans le cas d'une fonctionnelle générale (*voir* n° 66) de la première Partie) contenant des termes de la forme

$$\int_{\alpha'}^{\alpha''} g(\alpha)\, x[t_1(\alpha)]\, x[t_2(\alpha)]\, d\alpha,$$

t_1 et t_2 étant différents, sauf peut-être pour des valeurs particulières de α. Pour un tel terme, on trouve comme valeur moyenne

$$\frac{R^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha'}^{\alpha''} g(\alpha)\, d\alpha \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \xi\, e^{-\frac{\xi^2}{2}}\, d\xi \right]^2 = 0,$$

de sorte que la formule (10) est générale pour les fonctionnelles entières du second degré, continues dans la sphère (1).

On en déduit immédiatement que, *pour toute fonctionnelle admettant en un point* O *des variations première et seconde au sens de M. Fréchet, la valeur moyenne de* $U - U_0$ *dans une sphère de centre* O *et de rayon infiniment petit* r, *est équivalente à* $\frac{r^2}{2}\Delta U_0$. U_0 et ΔU_0 désignant les valeurs de U et ΔU en O. Cette propriété peut servir de nouvelle définition au symbole ΔU (¹).

Ces résultats seront généralisés plus loin, lorsque nous exposerons la théorie des fonctionnelles harmoniques. Remarquons que la méthode du passage du fini à l'infini les rend intuitifs. Nous savons en effet qu'une fonctionnelle continue du second degré est la limite d'une fonction

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} c_{i,j} x_i x_j,$$

dont la valeur moyenne à l'intérieur de la sphère

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = n\,R^2$$

est

$$R^2(c_{1,1} + c_{2,2} + \ldots + c_{n,n}) = \frac{R^2}{2}\Delta u.$$

23. Considérons le cas où la fonctionnelle U est de la forme

$$U = \int_0^1 f(t)\,x^2(t)\,dt.$$

Nous savons que la valeur moyenne de $\frac{U}{R^2}$ sur la sphère $r = R$ est

$$\int_0^1 f(t)\,dt, \tag{11}$$

et qu'elle est presque partout égale à cette valeur moyenne.

Inversement, $f(t)$ étant supposé positif, cherchons la valeur moyenne de

$$\frac{r^2}{a^2} = \frac{1}{a^2}\int_0^1 x^2(t)\,dt$$

(¹) Ainsi ΔU peut avoir un sens sans que l'on soit assuré pour cela de l'existence de la dérivée U''_{x^2}.

sur l'*ellipsoïde* $U = a^2$. En posant

$$y(t) = \sqrt{f(t)}\, x(t),$$

on est ramené à la moyenne d'une fonctionnelle du second degré sur une sphère. Il est naturel de penser que ce changement linéaire ne change pas la valeur moyenne [cela n'est pas d'ailleurs évident, car $x(t)$ et $y(t)$ ne sont pas en même temps des fonctions simples d'ordre n]. On trouve alors comme valeur moyenne

$$\int_0^1 \frac{dt}{f(t)}, \tag{12}$$

qui n'est pas inverse de la précédente.

Cela peut paraître surprenant si l'on énonce les résultats obtenus en disant que la fonctionnelle $\frac{U}{r^2}$ sur la sphère $r = R$ et par suite dans tout l'espace est presque partout égale à sa valeur moyenne (12), et que la quantité inverse $\frac{r^2}{U}$, sur l'ellipsoïde $U = a^2$ et par suite dans tout l'espace, est presque partout égale à sa valeur moyenne (13).

La contradiction apparente disparaît si l'on observe que « presque partout » n'a pas le même sens dans les deux cas. Dans l'ellipsoïde, deux portions de surface vues du centre sous un même angle solide ne sont pas égales, mais la plus rapprochée du centre est négligeable vis-à-vis de l'autre. Il peut ainsi arriver que, pour une fonctionnelle telle que $\frac{U}{r^2}$ ayant une valeur constante sur toute droite passant par l'origine, la valeur moyenne ne soit pas la même aux deux points de vue, puisque les angles solides n'ont pas le même poids dans les deux cas; les poids étant même infiniment différents, on s'explique qu'au premier point de vue $\frac{U}{r^2}$ ait presque partout la valeur (11), et qu'au second ce rapport ait presque partout une valeur différente.

Un exemple plus simple d'une circonstance analogue est le suivant : On sait que presque toute la surface d'une sphère est concentrée sur son équateur. Par suite, *vue d'un point* A, une surface quelconque paraîtra presque tout entière concentrée à son intersection avec un plan passant par A; le reste de la surface sera vu sous un angle solide nul. Vue d'un autre point A′ situé à une distance d du plan P, la même surface paraîtra de même concentrée à son intersection avec

n'importe quel plan P′ passant par A′. En prenant le plan P′ parallèle à P, on voit que deux régions de la surface n'ayant aucun point commun peuvent, selon le point de vue où l'on se place, paraître constituer toute la surface. La distance d'un point de la surface au plan P aura pour valeur moyenne zéro si l'on donne pour poids aux différents éléments de surface l'angle solide sous lequel on les voit du point A, et d si l'on remplace A par A′.

23. **La notion de courbure moyenne.** — Soit une surface S, définie par l'équation $U = 0$, U étant une fonctionnelle continue et admettant une variation

$$\delta U = \int_0^1 U'_x \, \delta x \, dt,$$

définie dans le champ des fonctions δx de carrés sommables. En un point A de la surface, le plan tangent P est bien défini par l'équation $\delta U = 0$. Pour définir la courbure d'une section normale, considérons la section de S par le plan (à deux dimensions) défini par la normale AN à la surface et une tangente AT; sur cette section prenons un point M infiniment voisin de A et abaissons la perpendiculaire MH sur le plan P; elle sera parallèle à AN, par suite dans le plan sécant, et H sera sur AT. Désignons par δ la distance HM et par r la distance AM. La courbure de la section considérée sera la limite de $\frac{2\delta}{r^2}$.

La *courbure moyenne* d'une surface en P sera la *moyenne* de cette courbure dans les différentes directions du plan tangent.

La définition de la moyenne ne soulève ici aucune difficulté, car il s'agit de moyenne sur une sphère.

Soient en effet Σ une sphère de centre A et Σ' sa section par P. La quantité dont nous devons prendre la moyenne est définie sur Σ'; nous pouvons compléter arbitrairement sa définition sur Σ, en nous imposant seulement de respecter la continuité. La moyenne sur Σ est bien définie, et comme presque toute la sphère Σ est concentrée sur la section Σ', elle ne dépend que des valeurs sur Σ'. D'autre part, en représentant chaque circonférence section de Σ par un plan normal ATN par le point où elle coupe AT, à deux régions de Σ décrites par cette circonférence que l'on considère comme égales pour le calcul de la moyenne correspondront deux régions de Σ'

décrites par ce point qu'il est naturel de considérer comme égales. La moyenne sur Σ, qui ne dépend que des valeurs sur Σ', peut donc être considérée comme étant la moyenne sur Σ'. C'est dans ce sens que nous entendons le mot *moyenne* dans la définition de la courbure moyenne.

Dans ces conditions, le résultat du n° 17 est applicable, et nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Si la courbure en A *de la section normale tangente à* AT *est une fonction uniformément continue du point où* AT *coupe la sphère* Σ, *elle a la même valeur dans presque toutes les directions; cette valeur est la courbure moyenne.*

24. Il est facile d'exprimer analytiquement la courbure moyenne. La fonctionnelle U qui définit la surface peut, dans le voisinage du point A, être représentée par une série de Taylor

$$U = U_1 + \frac{1}{2} U_2 + \ldots + \frac{1}{n!} U_n + \ldots,$$

et il est essentiel d'en supposer les deux premiers termes bien définis, pour que le plan tangent et la courbure de chaque section normale soient bien définis. La distance au plan tangent est $\frac{U_1}{\sqrt{\Delta_1 U_1}}$; or U_1 est équivalent à $-\frac{U_2}{2}$, pour un point situé sur la surface et très voisin de A. Par suite, la quantité $\frac{2\delta}{r^2}$, dont nous devons prendre la valeur moyenne, est équivalente dans les mêmes conditions à $-\frac{1}{\sqrt{\Delta_1 U_1}} \frac{U_2}{r^2}$.

La valeur moyenne de $\frac{U_2}{r^2}$ est égale à la valeur de ΔU au point A. Par suite, avec une convention convenable pour le signe, la courbure moyenne s'écrit

$$K = \frac{\Delta U}{\sqrt{\Delta_1 U_1}} = \frac{\Delta U}{\sqrt{\Delta_1 U}}, \tag{13}$$

les valeurs des paramètres différentiels ΔU et $\Delta_1 U$ étant relatives au point A.

En un point quelconque de l'espace fonctionnel, la même expression représente la courbure moyenne de la surface de niveau U=const. qui passe par ce point.

25. Surface minima. — Nous appellerons *surface minima* une surface dont la courbure moyenne est nulle en chaque point.

En chaque point A, la courbure normale est donc nulle dans presque toutes les directions. On peut dire en termes moins précis que, *dans le voisinage d'un point, la surface est presque un plan.* Cela signifie que, si l'on considère la section de la surface par une petite sphère Σ de centre A, la distance des points de cette section au plan tangent est presque partout inférieure à Cr^2, C étant une constante positive quelconque.

Ce résultat n'est naturellement pas exact pour une surface qui ne serait pas minima. Mais il est curieux de remarquer que, pour une surface minima, il reste exact si l'on remplace le plan tangent P par n'importe quel autre plan P′ passant par A. De même que la sphère Σ est presque tout entière concentrée sur n'importe lequel de ses plans diamétraux, on peut dire que sa section par P qui, d'après ce que nous venons de voir, est presque confondue avec sa section par la surface minima, est d'autre part située presque tout entière dans le voisinage immédiat du plan P′.

D'après la formule (13), cela revient au même de dire que la fonctionnelle U est *harmonique* (c'est-à-dire que $\Delta U = 0$) ou que les surfaces $U = \text{const.}$ sont minima. Ce résultat est d'une grande importance pour la théorie des fonctionnelles harmoniques que nous exposerons plus loin.

26. Exemples de valeurs moyennes dans des volumes autres que la sphère. — Nous verrons au Chapitre IV des extensions, à des volumes autres que la sphère, du théorème général du n° 15. Nous allons au contraire indiquer ici des cas dans lesquels la notion de moyenne se présente avec son aspect habituel, des valeurs différentes intervenant effectivement dans le calcul de la moyenne.

Considérons un *cylindre*, défini par une équation de la forme

$$F\,|\,[x(t) - \lambda f(t)]\,| = 0, \tag{14}$$

λ étant défini par la formule

$$\lambda \int_0^1 f^2(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,x(t)\,dt = P\,|\,[x(t)]\,|.$$

La fonction $x(t) - \lambda f(t)$ représentant la projection de $x(t)$ sur le

plan $P = \text{const.}$, l'équation (14) représente bien un cylindre. Supposons-le tel que le volume défini par les inégalités

$$F < 0, \qquad a_1 < P < a_2$$

soit fini. Ce volume est évidemment divisé en volumes égaux par des plans parallèles aux bases et équidistants. Par suite, la moyenne dans ce volume d'une fonctionnelle de la forme $\varphi(P)$ n'est autre que la moyenne de la fonction $\varphi(a)$ dans l'intervalle (a_1, a_2). C'est bien une véritable moyenne, tenant compte des valeurs différentes de cette fonction.

27. Considérons maintenant le cas du *volume de révolution*, défini par l'équation

$$F(P, r) < 0 \tag{15}$$

avec

$$P = \int_0^1 f(t)\, x(t)\, dt,$$

$$r^2 = \int_0^1 x^2(t)\, dt, \qquad \int_0^1 f^2(t)\, dt = 1,$$

et supposons-le fini. Soit à y chercher la moyenne d'une fonctionnelle de la forme $\varphi(P)$.

Si on le divise en tranches infiniment minces par les plans $P = \text{const.}$, la tranche du plus grand *rayon* l'emportera infiniment sur les autres. Si donc le rayon

$$\rho = \sqrt{r^2 - P^2}$$

atteint son maximum pour une seule valeur α de a, la moyenne cherchée sera $\varphi(\alpha)$.

Supposons maintenant le maximum ρ' de ρ atteint pour les valeurs α_1 et α_2 de α. La moyenne cherchée ne dépendra évidemment que de $\varphi(\alpha_1)$ et $\varphi(\alpha_2)$. Quels poids devons-nous donner respectivement à ces deux valeurs?

Appelons η_1 et η_2 les épaisseurs des tranches voisines respectivement des plans $P = a_1$ et $P = a_2$ et pour lesquelles

$$\rho > \rho' - \varepsilon.$$

Les points pour lesquels cette inégalité est vérifiée comptant seuls

dans le calcul de la moyenne, il est bien évident que si le rapport de η_1 à η_2 a une limite quand ε tend vers zéro, il faut donner à $\varphi(\alpha_1)$ et $\varphi(\alpha_2)$ des poids dont le rapport soit cette limite. Ainsi, si la méridienne de la surface de révolution, définie par l'équation (15), a aux points considérés des rayons de courbure égaux respectivement à R_1 et R_2, η_1 et η_2 sont à la limite dans le même rapport que $\sqrt{R_1}$ et $\sqrt{R_2}$, et la moyenne cherchée est

$$\frac{\varphi(\alpha_1)\sqrt{R_1}+\varphi(\alpha_2)\sqrt{R_2}}{\sqrt{R_1}+\sqrt{R_2}}.$$

Si R_2 est nul et R_1 fini, ou bien si R_1 est infini et R_2 fini, il n'y a pas à tenir compte de la valeur de $\varphi(\alpha_2)$ et la moyenne est $\varphi(\alpha_1)$.

Considérons encore le cas où le maximum ρ' est atteint pour une infinité dénombrable de valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots$, de α, tendant en croissant vers une limite α', et le volume de révolution étant limité par le plan $P=\alpha'$. Supposons que les rayons de courbure R_1, $R_2, \ldots, R_i, \ldots$, correspondant aux valeurs considérées de α, soient tous finis. Les différentes valeurs de $\varphi(\alpha_i)$ ont des poids proportionnels à $\sqrt{R_i}$. Le poids total est fini ou infini suivant que la série

$$\sqrt{R_1}+\sqrt{R_2}+\ldots+\sqrt{R_i}+\ldots$$

est convergente ou non. Dans le premier cas, la moyenne cherchée est évidemment

$$\frac{\varphi(\alpha_1)\sqrt{R_1}+\varphi(\alpha_2)\sqrt{R_2}+\ldots+\varphi(\alpha_i)\sqrt{R_i}+\ldots}{\sqrt{R_1}+\sqrt{R_2}+\ldots+\sqrt{R_i}+\ldots}.$$

Dans le second cas, elle est égale à $\varphi(\alpha')$.

On voit que, suivant les cas, la moyenne cherchée dépend d'une seule des valeurs de la fonction φ, d'un nombre fini de ces valeurs, ou d'une infinité dénombrable, ou de toutes les valeurs de cette fonction. Mais dans aucun cas il n'y a ambiguïté sur le sens à donner à la moyenne.

CHAPITRE III.

DE L'EMPLOI D'UNE INFINITÉ DÉNOMBRABLE DE COORDONNÉES DANS L'ESPACE FONCTIONNEL.

SOMMAIRE : Notions générales. — La notion de suite également dense. — Le cas des séries trigonométriques. — Exemple de cas où l'ordre des termes influe sur la densité. — Exemple de suite non également dense. — Remarques sur l'ordre des termes dans les suites de fonctions orthogonales. — La notion de suite normalement dense. — Le paramètre différentiel du second ordre. — La notion de moyenne dans l'espace Ω. — Le cas de la sphère.

28. **Notions générales.** — L'espace Ω, d'après une notation répandue, est le lieu des points, représentant une suite de nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, telle que Σa_n^2 converge; de plus, (a) désignant le point correspondant à cette suite, la distance r entre deux points (a) et (b) est définie par la formule

$$r^2 = \Sigma (b_n - a_n)^2. \tag{1}$$

D'après cela, et d'après les résultats du Chapitre VII de la première Partie, l'espace Ω n'est autre chose que l'espace fonctionnel rapporté à ce que nous avons appelé un *système de coordonnées orthogonales*, défini par la donnée d'une suite complète de fonctions orthogonales et normales $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t), \ldots$. Une fonction u définie et continue dans l'espace Ω est alors la même chose qu'une fonctionnelle $U|[x]|$ continue dans le champ des fonctions de carrés sommables. Mais les deux points de vue peuvent conduire à des définitions différentes de la moyenne ou du paramètre différentiel Δu ou ΔU. L'objet de ce Chapitre est de définir ces notions dans l'espace Ω, et de rechercher à quelles conditions ces définitions reviennent au même que celles du Chapitre précédent relatives à l'espace fonctionnel.

Nous avons déjà vu au Chapitre VII de la première Partie les relations entre les dérivées premières $\frac{\partial u}{\partial a_n}$ et la dérivée fonctionnelle U'_x;

les dérivées $\frac{\partial u}{\partial a_n}$ sont les coefficients du développement de U'_x en série de fonctions f; les deux notations correspondent au même vecteur de l'espace. Nous en avons déduit l'égalité des deux expressions du paramètre différentiel du premier ordre $\Delta_1 U$, qui représentent, dans l'un ou l'autre système de notations, le carré de la longueur de ce vecteur.

29. La notion de suite également dense. — Nous avons rappelé au Chapitre VII de la première Partie le rôle que joue, dans la théorie des changements de coordonnées dans l'espace E_n, l'équivalence des systèmes

$$(S_n)\qquad \begin{cases} c_{h,1}^2 + c_{h,2}^2 + \ldots + c_{h,n}^2 = 1, \\ c_{h,1}c_{k,1} + c_{h,2}c_{k,2} + \ldots + c_{h,n}c_{k,n} = 0 \\ (h,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ h \neq k) \end{cases}$$

et

$$(S'_n)\qquad \begin{cases} c_{1,i}^2 + c_{2,i}^2 + \ldots + c_{n,i}^2 = 1, \\ c_{1,i}c_{1,j} + c_{2,i}c_{2,j} + \ldots + c_{n,i}c_{n,j} = 0 \\ (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ i \neq j), \end{cases}$$

déduits l'un de l'autre par interversion des lignes et des colonnes dans le tableau des n^2 coefficients $c_{h,i}$. Nous avons vu aussi que, n devenant infini, les deux systèmes (S) et (S′) que l'on obtenait à la limite n'étaient pas nécessairement équivalents; mais le premier entraîne le second si l'on sait que les équations

$$a_h = c_{h,1}\alpha_1 + c_{h,2}\alpha_2 + \ldots \qquad (h = 1,\ 2,\ \ldots)$$

sont résolubles par rapport aux α; et inversement le second entraîne le premier si l'on sait que les équations

$$\alpha_i = c_{1,i}a_1 + c_{2,i}a_2 + \ldots \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots)$$

sont résolubles par rapport aux a. En d'autres termes, si les $c_{h,i}$ sont les coefficients d'un changement de coordonnées dans l'espace Ω, l'un des deux systèmes considérés ne peut pas être vrai sans l'autre.

Rappelons aussi que, si le système (S) est vérifié ainsi que les relations de la première ligne du système (S′), celles de la seconde ligne en résultent nécessairement.

Au lieu d'un changement de coordonnées de cette nature, considérons celui qui consiste à passer des coordonnées a_n à la fonction $x(t)$,

autrement dit du point de vue de l'espace Ω à celui de l'espace fonctionnel. Ce changement de coordonnées est défini par les fonctions $f_n(t)$ qui remplacent les coefficients $c_{h,i}$; la variable t joue le rôle du second indice; c'est un indice qui varie d'une manière continue.

Le système

$$(2)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 f_i^2(t)\,dt = 1, \\ \displaystyle\int_0^1 f_i(t)\,f_j(t)\,dt = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots;\ i \neq j), \end{cases}$$

qui exprime que les fonctions de la suite (1) sont orthogonales et normales, est analogue à un des systèmes considérés ci-dessus, à cela près qu'il y figure des moyennes au lieu de sommes. Par interversion des deux indices, c'est-à-dire ici de l'indice et de la variable d'intégration, on est conduit à considérer le système

$$(3)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} F_n(t) = 1, \\ \lim\limits_{n\to\infty} F_n(t,\tau) = 0 \qquad (t \neq \tau), \end{cases}$$

où

$$F_n(t,\tau) = \frac{1}{n}\left[f_1(t)\,f_1(\tau) + f_2(t)\,f_2(\tau) + \ldots + f_n(t)\,f_n(\tau)\right],$$

$$F_n(t) = F_n(t, t).$$

Lorsque $F_n(t)$ convergera *en moyenne* vers 1 dans l'intervalle $(0, 1)$ et que $F_n(t,\tau)$ convergera *en moyenne* vers zéro dans le carré $0 < t < 1$, $0 < \tau < 1$; en d'autres termes, lorsqu'on aura

$$(4)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 [F_n(t) - 1]^2\,dt = 1, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1\int_0^1 F_n^2(t,\tau)\,dt\,d\tau = 0, \end{cases}$$

nous dirons que la suite (1) est *également dense dans l'intervalle* $(0, 1)$. S'il en est ainsi, on peut affirmer, $g(t)$ et $h(t,\tau)$ désignant des fonctions de carrés sommables, que

$$(5)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 g(t)\,F_n(t)\,dt = \int_0^1 g(t)\,dt, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1\int_0^1 h(t,\tau)\,F_n(t,\tau)\,dt\,d\tau = 0. \end{cases}$$

Cette condition jouera un grand rôle dans la suite. Avant d'aborder les questions qui forment l'objet principal de ce Chapitre, nous présenterons quelques remarques à son sujet.

30. Remarquons d'abord que cette notion dépend essentiellement, en général, de l'ordre des fonctions $f_n(t)$. Une suite également dense peut cesser de l'être si l'on change l'ordre des termes. Cette notion se distingue essentiellement par là de celles que nous avons introduites jusqu'ici dans l'étude des suites de fonctions orthogonales. Nous ne devons donc pas nous attendre, même dans le cas des suites complètes, à ce que le système (4) soit une conséquence nécessaire du système (2) qui exprime que les fonctions de la suite sont orthogonales et normales.

Du moins en est-il ainsi de la condition relative à $F_n(t)$. Celle relative à $F_n(t, \tau)$ est toujours vérifiée pour les suites, complètes ou non, de fonctions orthogonales et normales. Pour le montrer, nous allons montrer que la valeur moyenne de $F_n(t, \tau)$ dans le rectangle $\mathcal{R}$, défini par les inégalités

$$t_1 < t < t_2, \qquad \tau_1 < t < \tau_2,$$

tend vers zéro pour n infini, quels que soient t_1, t_2, τ_1, τ_2; on pourrait d'ailleurs remplacer les intervalles (t_1, t_2) et (τ_1, τ_2) par n'importe quels ensembles de mesures non nulles.

Désignons par $x(t)$ la fonction égale à $\frac{1}{\sqrt{t_2 - t_1}}$ dans l'intervalle (t_1, t_2) et nulle dans le reste de l'intervalle $(0, 1)$, et par $\xi(\tau)$ la fonction égale à $\frac{1}{\sqrt{\tau_2 - \tau_1}}$ dans l'intervalle (τ_1, τ_2) et nulle dans le reste de l'intervalle $(0, 1)$. Posons

$$a_n = \int_0^1 f_n(t)\, x(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{t_2 - t_1}} \int_{t_1}^{t_2} f_n(t)\, dt,$$

$$\alpha_n = \int_0^1 f_n(\tau)\, \xi(\tau)\, d\tau = \frac{1}{\sqrt{\tau_2 - \tau_1}} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f_n(\tau)\, d\tau.$$

Les fonctions $x(t)$ et $\xi(t)$ étant normales, on a

$$(a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n)^2 \leqq (a_1^2 + \ldots + a_n^2)(\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2) \leqq 1.$$

(On peut même remarquer que si les intervalles (t_1, t_2) et (τ_1, τ_2) n'ont aucune partie commune et si de plus la suite (1) est complète,

les fonctions $x(t)$ et $\xi(t)$ sont orthogonales, et la série $\Sigma a_n \alpha_n$ a une somme nulle.

La moyenne de $F_n(t, \tau)$ dans le rectangle $\mathcal{R}$ est alors

$$\frac{1}{n(t_2-t_1)(\tau_2-\tau_1)}\sum_{i=1}^{i=n}\int_{t_1}^{t_2} f_i(t)\,dt\int_{\tau_1}^{\tau_2} f_i(\tau)\,d\tau = \frac{a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n}{n\sqrt{(t_2-t_1)(\tau_2-\tau_2)}}.$$

Son numérateur ayant son module au plus égal à 1, elle tend bien vers zéro, ce qui établit le résultat énoncé.

Il est curieux de remarquer que si la suite (1) est également dense, de sorte que $F_n(t, \tau)$ converge en moyenne vers 1 sur la droite $t = \tau$, cela ne l'empêche pas de converger en moyenne vers zéro dans n'importe quel carré ayant un segment de cette droite pour diagonale, et par suite, si petit que soit h positif, dans la région $|t - \tau| < h$. La même circonstance peut se produire pour d'autres droites, comme nous le verrons par un exemple (n° 32).

31. **Le cas des séries trigonométriques.** — Prenons pour suite (1) la suite

$$(6)\qquad 1,\quad \sqrt{2}\cos 2\pi t,\quad \sqrt{2}\sin 2\pi t,\quad \ldots,\quad \sqrt{2}\cos 2p\pi t,\quad \sqrt{2}\sin 2p\pi t,\quad \ldots.$$

Si $n = 2p + 1$, on a

$$\begin{aligned} F_n(t) &= \frac{1}{2p+1}[1 + 2\cos^2 2\pi t + 2\sin^2 2\pi t + \ldots + 2\cos^2 2n\pi t + 2\sin^2 2n\pi t] \\ &= 1, \end{aligned}$$

de sorte que la suite considérée est également dense.

Considérons maintenant la suite ne contenant que des sinus

$$(7)\qquad \sqrt{2}\sin \pi t,\quad \sqrt{2}\sin 2\pi t,\quad \ldots,\quad \sqrt{2}\sin n\pi t,\quad \ldots.$$

On a pour cette suite

$$\begin{aligned} F_n(t) &= \frac{2}{n}(\sin^2 \pi t + \sin^2 2\pi t + \ldots + \sin^2 n\pi t) \\ &= \frac{1}{n}\left[n + \frac{1}{2} - \frac{\sin(2n+1)\pi t}{2\sin \pi t}\right], \end{aligned}$$

ce qui montre que la suite (7) est aussi également dense. La même conclusion s'applique au cas des séries de cosinus.

Il y a toutefois une différence entre le cas des suites (6) et (7). La suite (7) fait apparaître des *points exceptionnels*. Nous appellerons ainsi les points de l'intervalle (0, 1) tels que $F_n(t)$ ne tende pas uniformément vers 1 dans leur voisinage. Dans le cas de la suite (6), $F_n(t)$ tend uniformément vers 1 dans tout l'intervalle, et il n'y a pas de points exceptionnels. Dans le cas de la suite (7), au contraire, les extrémités de l'intervalle sont des points exceptionnels.

32. Examinons maintenant ce qui se passe lorsqu'on change l'ordre des termes de la suite (6). On peut s'arranger pour rendre exceptionnelle n'importe quelle valeur t_1 de l'intervalle (0, 1). Les fonctions $f_n^2(t_1)$ sont en effet comprises entre 0 et 2, variant effectivement une infinité de fois entre ces limites quand n prend toutes les valeurs entières; en changeant l'ordre des termes, on peut donc s'arranger pour que la moyenne $F_n(t_1)$ de ces quantités tende vers telle limite que l'on veut entre 0 et 2, ou bien même n'ait pas de limite. On peut donc rendre exceptionnelle la valeur t_1.

On peut de même rendre simultanément exceptionnels un nombre fini de points donnés de l'intervalle (0, 1), et même une infinité dénombrable de points donnés, pouvant constituer un ensemble partout dense. Mais on ne peut pas constituer d'intervalle exceptionnel, en ce sens que la moyenne de $F_n(t)$, dans n'importe quel intervalle fini (t_1, t_2), tend vers 1, c'est-à-dire encore que $F_n(t)$ converge en moyenne vers 1 dans tout l'intervalle (0, 1).

Pour le montrer, observons que les fonctions $2\cos^2 p\pi t$ et $2\sin^2 p\pi t$ ont pour valeur moyenne, dans l'intervalle considéré,

$$1 \pm \frac{\sin 4p\pi t_2 - \sin 4p\pi t_1}{4p\pi(t_2 - t_1)} = 1 \pm \frac{\theta_p}{2p\pi(t_2 - t_1)},$$

θ_p ayant son module inférieur à 1. Cette valeur moyenne tend vers 1 pour p infini. Par suite, les fonctions $f_n(t)$ étant les fonctions (6), rangées dans un ordre quelconque, la valeur moyenne de $f_n^2(t)$ dans l'intervalle considéré tend vers 1, et il en est évidemment de même de celle de $F_n(t)$.

La suite (6) jouit donc de cette propriété d'être également dense et de le rester si l'on change l'ordre de ses termes d'une manière quelconque.

En ce qui concerne la condition relative à $F_n(t, \tau)$, on peut de

même faire apparaître des lignes exceptionnelles autres que la droite $t = \tau$, sur lesquelles $F_n(t, \tau)$ tende vers une limite non nulle. Ainsi, pour $\tau = 1 - t$, et pour l'ordre indiqué formule (6), on a

$$F_{2n+1}(t, 1-t) = \frac{1 + 2\cos^2 2\pi t - 2\sin^2 2\pi t + \ldots + 2\cos^2 2n\pi t - 2\sin^2 2n\pi t}{2n+1},$$

expression qui tend vers zéro, sauf pour $t = 0$, $\frac{1}{2}$, ou 1. Mais on peut changer l'ordre des termes de manière à favoriser soit les termes positifs, soit les termes négatifs, et l'on peut s'arranger pour que $F_n(t, 1-t)$ converge en moyenne vers telle valeur que l'on voudra de l'intervalle $(-1, +1)$, limites comprises. La droite $\tau = 1 - t$ sera alors exceptionnelle; mais, d'après le n° 30, il n'y aura pas d'aire exceptionnelle.

33. Exemple de cas où l'ordre des termes influe sur la densité. — Divisons l'intervalle $(0, 1)$ en p intervalles égaux, et désignons par $g_{p,i}(t)$ la fonction égale à $\sqrt{p}$ dans l'intervalle $\left(\frac{i-1}{p}, \frac{i}{p}\right)$, et nulle dans le reste de l'intervalle $(0, 1)$. Les fonctions

$$(8) \qquad g_{p,1}(t), \quad g_{p,2}(t), \quad \ldots, \quad g_{p,p}(t)$$

sont orthogonales et normales. Elles définissent dans l'espace fonctionnel une variété linéaire représentant les fonctions simples d'ordre p, au sens de Gateaux (*voir* n° 13). La fonction la plus approchée d'une fonction de carré sommable $x(t)$, qui est représentée par la projection sur cette variété linéaire du vecteur qui représente $x(t)$, est évidemment la fonction égale, dans chacun des intervalles $\left(\frac{i-1}{p}, \frac{i}{p}\right)$, à la moyenne de $x(t)$ dans cet intervalle.

Remplaçons p par $2p$. Nous obtenons une suite analogue

$$(9) \qquad g_{2p,1}(t), \quad g_{2p,p}(t), \quad \ldots, \quad g_{2p,2p}(t).$$

En remplaçant ces fonctions par des combinaisons linéaires convenables, on aura un autre ensemble de fonctions dont les combinaisons linéaires représentent toutes les fonctions simples d'ordre $2p$. Prenons en particulier les fonctions (8), et les fonctions

$$(10) \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}[g_{2p,2i-1}(t) - g_{2p,2i}(t)] \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

égales à $+\sqrt{p}$ et $-\sqrt{p}$ respectivement dans les deux moitiés de l'in-

tervalle $\left(\frac{i-1}{p}, \frac{i}{p}\right)$, et nulles dans le reste de l'intervalle $(0, 1)$. Elles sont bien normales et orthogonales deux à deux. On voit donc qu'on peut passer de l'ensemble des fonctions simples d'ordre p à l'ensemble des fonctions simples d'ordre $2p$ par l'introduction des p fonctions (10), qui sont normales, orthogonales entre elles et aux précédentes.

Donnons ainsi à p les valeurs $1^h, 2^h, 4^h, \ldots, 2^h, \ldots$; nous obtenons une suite illimitée de fonctions orthogonales et normales. Cette suite est, de plus, complète, puisque des combinaisons linéaires des n premières fonctions permettent de représenter n'importe quelle fonction simple d'ordre $n = 2^h$, et par suite, si h est assez grand, d'approcher autant qu'on veut, en moyenne, de n'importe quelle fonction de carré sommable.

Prenons cette suite pour suite des $f_n(t)$. Nous appellerons *fonctions $f_n(t)$ relatives à un intervalle* celles qui sont partout nulles en dehors de cet intervalle. On peut s'arranger pour ranger ces fonctions dans un ordre qui favorise les fonctions relatives à l'intervalle $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, par exemple pour que sur les n premières fonctions il y en ait environ $\frac{3}{4}n$ relatives à cet intervalle. Comme pour ces fonctions la moyenne de $f_n^2(t)$ entre 0 et $\frac{1}{2}$ est 2, celle de $F_n(t)$ est $\frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{2}$, et $F_n(t)$ ne peut converger en moyenne vers 1.

D'une manière générale, on peut s'arranger de manière à obtenir comme densité n'importe quelle fonction $\mu^2(t)$ positive, sommable, et de valeur moyenne 1 dans l'intervalle $(0, 1)$. Il suffit que, sur les n premières fonctions, la proportion de celles relatives à l'intervalle (t_1, t_2) tende pour n infini vers

$$\int_{t_1}^{t_2} \mu^2(t)\, dt,$$

et cela quels que soient t_1 et t_2 entre 0 et 1. C'est une condition que l'on peut évidemment toujours réaliser en rangeant les $f_n(t)$ dans un ordre convenable.

34 Exemple de suite non également dense. — Prenons la suite (6) pour suite des fonctions $f_n(t)$; prenons comme nouvelle variable

$$\tau = \int_0^t \mu^2(t)\, dt,$$

$\mu(t)$ vérifiant les mêmes conditions qu'au numéro précédent, et ayant de plus son module limité supérieurement et inférieurement, et posons

$$x(t) = \mu(t)\xi(t),$$
$$f_n(t) = \mu(t)\varphi_n(\tau).$$

On a évidemment

$$\int_0^1 \varphi_h(\tau)\varphi_k(\tau)\,d\tau = \int_0^1 f_h(t)f_k(t)\,dt,$$
$$\int_0^1 \varphi_h(\tau)\xi(\tau)\,d\tau = \int_0^1 f_h(t)x(t)\,dt.$$

Il résulte de ces formules que les fonctions $\varphi_n(\tau)$ sont orthogonales et normales dans l'intervalle $(0, 1)$, que les coefficients du développement de $x(t)$ en série de fonctions $f_n(t)$ sont aussi ceux du développement de $\xi(\tau)$ en séries de fonctions $\varphi_n(\tau)$, et que ces dernières fonctions forment une suite complète. D'autre part,

$$\frac{1}{n}[\varphi_1^2(\tau) + \ldots + \varphi_n^2(\tau)] = \frac{1}{n\mu^2(t)}[f_1^2(t) + \ldots + f_n^2(t)]$$

converge en moyenne, non vers 1, mais vers $\frac{1}{\mu^2(t)}$, et cela quel que soit l'ordre des termes de la suite.

Les fonctions $\varphi(\tau)$ forment donc une suite qui n'est pas également dense, et qui ne peut le devenir par aucun changement dans l'ordre des termes.

35. **Remarques sur l'ordre des termes dans les suites de fonctions orthogonales.** — Étant donnée une suite (1), complète et non également dense, la question se pose de reconnaître si elle peut être rendue également dense par un changement convenable de l'ordre des termes [1].

Il semble que l'ordre convenable, s'il existe, puisse être défini de la manière suivante : les $n-1$ premières fonctions de la suite étant choisies, on choisira, parmi celles qui restent, celle qui occupera le rang n, par la condition de

---

[1] Il résulte de la suite que le problème analogue relatif à la notion de *suite normalement dense* (n° 40) est plus étroitement lié aux questions de calcul fonctionnel que nous étudions, et a plus de chance aussi d'avoir une solution unique, si l'on considère comme identiques deux ordres qui donnent nécessairement la même valeur limite à toute expression de la forme $\frac{A_1 + A_2 + \ldots + A_n}{n}$, les A_n étant finis.

rendre minima l'intégrale

$$(11) \qquad \int_0^1 [F_n(t) - 1]^2 \, dt.$$

Toutefois, cela n'est pas évident; il n'est pas sûr en effet que ce minimum soit le même que l'on obtiendrait en remettant en question à chaque opération les choix antérieurement faits. On est sûr que ce dernier minimum tend vers zéro s'il est possible de trouver un ordre tel que l'intégrale (11) tende vers zéro. Mais on n'en est pas sûr pour le minimum considéré d'abord; la seconde règle au contraire, remettant en question une infinité de fois le choix de la fonction devant occuper un rang déterminé, risque de ne pas aboutir à une définition précise.

D'ailleurs la première règle même peut donner lieu à ambiguïté si plusieurs fonctions conduisent à la même valeur de l'intégrale (11). Tel est le cas si l'on veut appliquer cette méthode à la suite (6). La première fonction est nécessairement 1, mais pour le second rang on peut hésiter entre toutes les autres.

36. Sans pousser plus loin l'étude de la question posée, remarquons que ce n'est pas aussi simple qu'on pourrait le penser de trouver une loi bien définie permettant de ranger dans un ordre bien déterminé les termes d'une suite complète de fonctions orthogonales et normales, de manière que si deux suites données diffèrent par l'ordre des termes et non par leur nature, on soit sûr de reconnaître leur identité en les rangeant dans l'ordre ainsi défini. Une telle loi doit être telle que :

1° Étant données deux fonctions différentes, on sache toujours déterminer leur ordre relatif;

2° Étant donnée une fonction de la suite, celles qui la précèdent dans l'ordre à définir soient en nombre fini.

Ainsi, on peut chercher à ranger les fonctions $f_n(t)$ dans l'ordre des $|\alpha_n|$ décroissants, α_n désignant la projection de $f_n(t)$ sur une direction de l'espace fonctionnel, soit

$$\alpha_n = \int_0^1 f_n(t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Plusieurs α_n peuvent être égaux en valeur absolue; dans ce cas, parmi les fonctions correspondantes, on rangera d'abord celles pour lesquelles α_n est positif, et s'il y en a plusieurs on fera intervenir la projection sur une autre direction. On arrivera ainsi toujours à savoir l'ordre relatif de deux fonctions $f_n(t)$. De plus, $\Sigma\alpha_n^2$ étant fini, toute fonction pour laquelle α_n ne sera pas nul aura un rang fini. Mais il peut arriver qu'il y ait certains α_n nuls, tandis qu'une infinité d'autres ne seraient pas nuls. Les fonctions $f_n(t)$ correspondant aux α_n nuls devraient être précédées d'une infinité d'autres. Il n'est pas possible alors d'arriver par le moyen proposé au résultat de ranger, suivant une loi bien déterminée, les termes d'une suite quelconque. Nous allons indiquer un procédé qui semble lié à la question de rendre une suite également dense.

37. Désignons par $\mathcal{F}_n(t)$ la fonction primitive de $f_n(t)$ ayant sa valeur moyenne nulle dans l'intervalle (0, 1), c'est-à-dire que la constante d'intégration est déterminée de manière à rendre minima l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 \mathcal{F}_n^2(t)\,dt.$$

L'ordre que nous considérons est celui des I_n décroissants. I_n ne pouvant pas être nul, pour montrer que chaque fonction $f_n(t)$ aura un rang fini, il suffit de montrer que I_n tend vers zéro. Nous montrerons même que la série ΣI_n est convergente :

Représentons $f_n(t)$ par la série de sinus

$$f_n(t) = c_{n,1}\,\varphi_1(t) + \ldots + c_{n,p}\,\varphi_p(t) + \ldots,$$

où

$$\varphi_p(t) = \sqrt{2}\sin p\pi t.$$

La fonction $\mathcal{F}_n(t)$ a alors la valeur

$$\mathcal{F}_n(t) = \frac{c_{n,1}}{\pi}\varphi_1(t) + \ldots + \frac{c_{n,p}}{p\pi}\Phi_p(t) + \ldots,$$

en posant

$$\Phi_p(t) = -\sqrt{2}\cos p\pi t.$$

Les fonctions $\Phi_p(t)$ étant orthogonales et normales, on a

$$I_n = \frac{1}{\pi^2}\left(c_{n,1}^2 + \ldots + \frac{1}{p^2}c_{n,p}^2 + \ldots\right).$$

En posant

$$c_{1,p}^2 + c_{2,p}^2 + \ldots + c_{n,p}^2 = s_{n,p} \leqq 1,$$

on a

$$(12)\quad I_1 + I_2 + \ldots + I_n$$
$$= \frac{1}{\pi^2}\left(s_{n,1} + \ldots + \frac{1}{p^2}s_{n,p} + \ldots\right) < \frac{1}{\pi^2}\left(1 + \ldots + \frac{1}{p^2} + \ldots\right) = \frac{1}{6}.$$

Lorsque n augmente, $s_{n,p}$ tend en croissant vers 1, de sorte que ΣI_n tend vers $\frac{1}{6}$. Pour une valeur finie de n, comme

$$s_{n,1} + s_{n,2} + \ldots + s_{n,p} + \ldots = n,$$

le maximum de la somme (12) s'obtient en rendant les n premières de ces sommes égales à 1 et les autres à zéro. Ces conditions sont réalisées si l'on prend la suite des $\varphi_n(t)$ pour suite des $f_n(t)$, ou d'une manière générale si l'on prend pour les n premières fonctions $f_n(t)$ des combinaisons des n premières fonctions $\varphi_n(t)$. Le maximum de $I_1 + I_2 + \ldots + I_n$ est donc

$$\frac{1}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right);$$

il est atteint pour toutes les valeurs de n si l'on prend la suite des $\varphi_n(t)$ comme suite des $f_n(t)$. Les I_n étant rangés par ordre de grandeur décroissante, ou du moins non croissante, le maximum de I_n est

$$\frac{1}{n\pi^2}\left(1+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right);$$

il peut être atteint en prenant pour les n premières fonctions $f_n(t)$ des combinaisons des n premières fonctions $\varphi_n(t)$ telles que $I_1 = I_2 = \ldots = I_n$. Naturellement, pour une suite déterminée de fonctions $f_n(t)$, cette circonstance ne se présente que pour une seule valeur de n.

38. D'après ce qui précède, une fonction de la suite (1) ne peut être précédée, dans l'ordre défini par la condition que les I_n soient décroissants, ou du moins non croissants, que par un nombre fini de fonctions. Mais il peut arriver qu'il y ait à un certain moment indétermination pour l'ordre entre un nombre fini de fonctions donnant la même valeur à I_n, et naturellement cette circonstance peut se reproduire une infinité de fois.

La règle la plus naturelle à adopter, pour rester dans le même ordre d'idées, est de considérer les intégrales analogues à I_n, obtenues en remplaçant $\mathcal{F}_n(t)$ par ses intégrales successives, la constante d'intégration étant définie chaque fois par la même règle que pour $\mathcal{F}_n(t)$. Ces intégrales ont la valeur

$$I_{n,h} = \frac{1}{\pi^2}\left(c_{n,1}^2+\ldots+\frac{1}{p^{2h}}c_{n,h}^2+\ldots\right).$$

Si les intégrales I_n relatives à deux fonctions sont égales, on comparera les valeurs de $I_{n,2}$, puis, s'il y a lieu, celles de $I_{n,3}$, et ainsi de suite. On arrivera ainsi à définir l'ordre relatif des deux fonctions, sauf dans les cas où les coefficients correspondants de leurs développements en séries de fonctions $\varphi_p(t)$ sont égaux au signe près. Dans ce cas, on pourra les classer d'après les signes des premiers coefficients différents.

39. Cet ordre paraît lié à la question des suites également denses parce qu'il ne fait apparaître pour la classification aucune fonction de t arbitrairement choisie. Dans les intégrales considérées, on accorde des poids égaux à des intervalles égaux.

Toutefois, la condition d'égale densité présente un caractère d'invariance que ne présente pas l'ordre que nous venons de définir. Dans la définition de l'égale densité, deux intervalles égaux jouent le même rôle, en ce sens que leur ordre n'intervient pas. On peut diviser l'intervalle $(0, 1)$ en intervalles quelconques et changer leur ordre; cette opération définit un changement de variables qui transforme une suite complète, également dense, de fonctions orthogonales et normales, en une suite de même nature. Aucun de ses caractères n'est altéré. Or par cette opération l'ordre que nous venons de définir est altéré.

Il n'est d'ailleurs pas possible de définir un ordre qui ne soit pas altéré dans

ces conditions. En effet, à ce point de vue, les fonctions

$$\varphi_p(t) = \sqrt{2}\sin p\pi t,$$

qui ont même fonction sommatoire, apparaissent comme identiques, et cela est lié au fait que leur ordre est indifférent pour la formation d'une suite également dense. Pour les ranger suivant un ordre déterminé, il faut faire intervenir des considérations de nature différente.

D'après ces remarques, il n'y a pas lieu de s'attendre à ce que l'ordre défini n°s 37 et 39 résolve la question posée au n° 35. Il est facile de le vérifier par des exemples. Il suffit de généraliser l'exemple du n° 33 (fonctions simples d'ordre 2^h) en remplaçant des intervalles égaux par des intervalles variant en progression géométrique.

40. La notion de suite normalement dense. — La notion de suite également dense suffit pour les résultats que nous nous proposons d'obtenir, dans le cas des fonctionnelles normales. Dans le cas des fonctionnelles générales, il faut introduire une notion un peu plus restrictive.

Considérons une répartition de masses à l'intérieur du carré $0 < t < 1$, $0 < \tau < 1$, symétrique par rapport à la diagonale $t = \tau$, ne comportant aucune masse finie située sur cette diagonale, et telle que la fonctionnelle du second degré

$$\iint x(t)\,x(\tau)\,d\Phi \tag{13}$$

correspondant à cette répartition soit finie, et par suite continue, dans le champ des fonctions de carrés sommables.

Nous dirons que la suite (1) est *normalement dense* si :

1° *La fonction* $F_n(t)$ *converge en moyenne vers* 1 *dans l'intervalle* $(0, 1)$;

2° *L'intégrale*

$$\iint F_n(t, \tau)\,d\Phi$$

tend vers zéro quand n augmente indéfiniment, quelle que soit la fonctionnelle additive à variation bornée Φ, *liée à une répartition de masses de la nature considérée.*

La condition que la fonctionnelle (13) soit continue dans le champ des fonctions de carrés sommables, exclut la possibilité que des masses finies soient situées dans un ensemble dont la projection sur

l'un des axes ait une mesure nulle. Un ensemble susceptible de contenir des masses doit donc avoir une mesure linéaire positive; en d'autres termes, contenir au moins une ligne, et la condition 2° ci-dessus revient à dire que $F_n(t, \tau)$ converge en moyenne vers zéro sur toute ligne autre que la droite $t = \tau$ ou une parallèle aux axes. Si une suite également dense n'est pas normalement dense, c'est donc qu'il existe des lignes, autres que la droite $t = \tau$ ou des parallèles aux axes, sur lesquelles $F_n(t, \tau)$ ne converge pas en moyenne vers zéro. Nous appellerons ces lignes *lignes exceptionnelles* de la suite considérée.

Lorsqu'une suite est normalement dense, nous dirons que l'ordre de ses termes est *normal;* nous dirons dans le même cas que les axes de coordonnées correspondants sont rangés dans un ordre normal. Cet ordre normal n'est d'ailleurs pas complètement déterminé. Si par exemple on considère une suite partielle de fonctions $f_n(t)$ d'indices $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$, tels que la densité moyenne $\frac{p}{n_p}$ des termes de cette suite dans la suite de toutes les fonctions $f_n(t)$ tende vers zéro, ces fonctions sont sans influence sur la valeur limite de $F_n(t, \tau)$ [du moins si les fonctions $f_n(t)$ sont finies]; il est alors indifférent, soit de changer l'ordre des termes de cette suite partielle, soit de déplacer ses termes par rapport aux autres, mais de manière que leur densité moyenne continue à tendre vers zéro. Au contraire, si l'on effectue un changement qui fasse varier la valeur limite de la densité d'une suite partielle de fonctions $f_n(t)$, il est impossible que l'ordre reste normal (*voir* n° 43). L'ordre normal est donc déterminé, à certaines substitutions près, qui forment un groupe, indépendant du choix des fonctions $f_n(t)$.

41. **Le paramètre différentiel du second ordre.** — Dans l'espace Ω, ce paramètre est défini par la formule

$$\Delta u = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial a_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial a_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial a_n^2} \right).$$

C'est la moyenne, et non la somme des dérivées $\frac{\partial^2 u}{\partial a_i^2}$ qu'il y a lieu de considérer, cette somme étant en général infinie. Si nous considérons par exemple une fonctionnelle du second degré de la forme

$$u = c_1 a_1^2 + c_2 a_2^2 + \ldots + c_n a_n^2 + \ldots,$$

elle sera définie et continue si les c_n sont limités supérieurement. Le paramètre différentiel du premier ordre

$$\Delta_1 u = \sum \left(\frac{\partial u}{\partial a_n}\right)^2 = 4 \sum c_n^2 a_n^2$$

est alors bien défini; mais la somme des dérivées secondes $2c_n$ est en général infinie, tandis que leur moyenne, qu'elle ait une limite ou soit indéterminée, reste finie.

Supposons maintenant que u représente, dans le système de coordonnées orthogonales défini par la suite (1), une fonctionnelle $U|[x(t)]|$, ayant une variation seconde de la forme normale

$$(14) \qquad \delta^2 U = \int_0^1 U''_{x^2} (\delta x)^2 \, dt + \int_0^1 \int_0^1 U''_{xx_1} \, \delta x \, \delta x_1 \, dt \, dt_1,$$

et demandons-nous si Δu, calculé comme il vient d'être dit, est égal à

$$\Delta U = \int_0^1 U''_{x^2} \, dt,$$

paramètre différentiel calculé au point de vue du Chapitre II.

Par définition de la variation seconde, $\frac{\partial^2 u}{\partial a_n^2}$ n'est autre chose que la variation $\delta^2 U$, calculée pour $\delta x = f_n(t)$. On en déduit

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial a_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial a_n^2}\right) \\ &= \int_0^1 U''_{x^2} \frac{1}{n} [f_1^2(t) + \ldots + f_n^2(t)] \, dt \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 U''_{xx_1} \frac{1}{n} [f(t) f(t_1) + \ldots + f_n(t) f_n(t_1)] \, dt \, dt_1. \end{aligned}$$

La fonction U''_{x^2} est nécessairement une fonction mesurable bornée, et U''_{xx_1} une fonction de carré sommable (U, et par suite $\delta^2 U$, étant supposés définis dans le champ des fonctions δx de carrés sommables). Si alors la suite (1) est également dense, l'expression précédente tend vers ΔU. Donc Δu existe et l'on a

$$(15) \qquad \Delta u = \Delta U.$$

42. Considérons maintenant le cas où $\delta^2 U$ n'est assujetti à aucune autre condition que d'être définie dans le champ des fonctions de

carrés sommables. En distinguant, dans la répartition de masses liées à $\delta^2 U$, celles qui peuvent être situées sur la droite $t = \tau$, il vient

$$(16) \qquad \delta^2 U = \int_0^1 U''_{x^2} (\delta x)^2 \, dt + \iint \delta x(t) \, \delta x(\tau) \, d\Phi,$$

Φ étant une fonctionnelle additive à variation bornée de l'espèce considérée n° 40. Il vient, comme au numéro précédent,

$$(17) \qquad \frac{1}{n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial a_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial a_n^2}\right) = \int_0^1 U''_{x^2} F_n(t) \, dt + \iint F_n(t, \tau) \, d\Phi.$$

Si la suite des fonctions $f_n(t)$ est normalement dense, il suffit de faire augmenter n indéfiniment pour retrouver la formule (15), qui s'applique ainsi dans ce cas à toute fonctionnelle continue admettant une variation seconde.

Ainsi, en supposant de toute façon la suite (1) également dense, il suffit pour qu'on puisse appliquer la formule (15), soit qu'elle soit de plus normalement dense, soit que la variation seconde $\delta^2 U$ ait la forme normale (14). Si aucune de ces conditions n'est remplie, c'est-à-dire si d'une part il existe des lignes exceptionnelles pour la suite (1), si d'autre part il en existe pour la répartition de masses liées à la variation $\delta^2 U$, le raisonnement précédent peut être en défaut. Mais il faut évidemment, pour que la formule (16) cesse d'être exacte, qu'une même ligne soit exceptionnelle aux deux points de vue, en ce sens qu'elle contienne des masses finies et que $F_n(t, \tau)$ ne converge pas en moyenne vers zéro sur cette ligne. Il n'y aurait aucune difficulté à passer de la formule (17) à la formule (15) si des masses finies sont réparties sur une ligne, et que sur une ligne différente de la précédente $F_n(t, \tau)$ cessait de converger en moyenne vers zéro.

43. **Remarque.** — Considérons une fonctionnelle de la forme

$$u = c_1 a_1^2 + c_2 a_2^2 + \ldots + c_n a_n^2 + \ldots,$$

les c_n restant finis sans tendre vers une limite. Il est évident que pour une telle fonctionnelle, Δu dépend effectivement de l'ordre des fonctions $f_n(t)$, et ne peut pas rester constamment égal à ΔU. Il est donc impossible que la suite (1) reste normalement dense pour un changement de l'ordre des termes qui fasse varier Δu. Tel est le cas, à condi-

tion de choisir u convenablement, pour tout changement faisant varier la densité moyenne, dans la suite des fonctions $f_n(t)$, des termes d'une suite partielle de ces fonctions. Le résultat énoncé n° 40 est donc établi.

Ainsi, la fonctionnelle

$$\int_0^1 x(t)\,x(1-t)\,dt = a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n^2 + \ldots$$

[en prenant la suite (6) pour suite des fonctions $f_n(t)$] est harmonique dans l'espace fonctionnel, c'est-à-dire annule ΔU. Elle annule aussi Δu, si l'on conserve l'ordre des termes indiqué par la formule (6); mais en changeant cet ordre, en favorisant systématiquement soit les cosinus, soit les sinus, on peut donner à Δu n'importe quelle valeur de l'intervalle $(-2, +2)$, limites comprises.

La même circonstance ne peut pas se produire pour la suite (6) et une fonctionnelle normale; cette suite restant également dense si l'on change l'ordre des termes, Δu conserve la même valeur.

44. **La notion de moyenne dans l'espace Ω.** — On peut, dans l'espace Ω comme dans l'espace fonctionnel, définir la moyenne d'une fonction dans un certain domaine. La marche à suivre est tout à fait analogue.

Nous considérerons comme $n^{\text{ième}}$ section de l'espace Ω l'ensemble E_n des points pour lesquels

$$a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = 0.$$

Une fonction u se réduit dans cette section à une fonction u_n de $a_1, a_2, \ldots, a_n$. On forme sa moyenne dans le domaine V_n, section par E_n d'un domaine V de l'espace Ω. La limite, pour n infini, est par définition la moyenne de u dans le domaine V.

Ainsi, la moyenne de u dans la sphère Σ, d'équation

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + \ldots = R^2, \tag{18}$$

est la limite de la moyenne de $u_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dans la sphère Σ_n d'équation

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = R^2.$$

On remarque que cette sphère a pour rayon R, et non $\sqrt{n}$, comme la sphère analogue qui intervient au point de vue exposé Chapitre II.

Les principaux résultats du Chapitre II s'appliquent évidemment avec cette nouvelle définition de la moyenne. Il est toujours vrai que le volume d'une sphère soit concentré sur sa surface, de sorte que la moyenne d'une fonctionnelle finie et continue ne dépend que des valeurs prises sur la surface. De même, si la fonctionnelle u est uniformément continue, le volume de la sphère est concentré près d'une seule des surfaces de niveau $u = \text{const.}$, de sorte que cette fonctionnelle a presque partout la même valeur. Les démonstrations sont les mêmes qu'au Chapitre II.

Il s'agit maintenant de rechercher si la moyenne définie dans l'espace Ω, et celle définie Chapitre II, sont égales. C'est ce que nous allons examiner dans le cas de la sphère.

45. **Le cas de la sphère.** — Plaçons-nous sur la surface de la sphère Σ, définie par la formule (18).

Une fonctionnelle du premier degré a évidemment pour moyenne sa valeur au centre de la sphère.

Considérons maintenant le cas d'une fonctionnelle homogène du second degré. Nous devons d'abord chercher sa moyenne sur la sphère Σ_n, $n^{\text{ième}}$ section de la sphère Σ. C'est un résultat connu, et d'ailleurs d'une vérification immédiate, que cette moyenne est

$$\frac{R^2}{2n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial a_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial a_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial a_n^2}\right).$$

A la limite, pour n infini, on trouve que la moyenne de u sur la sphère Σ, au point de vue de l'espace Ω, est $\frac{R^2}{2}\Delta u$.

Nous savons qu'au point de vue du Chapitre II, cette moyenne est $\frac{R^2}{2}\Delta U$.

Les conditions pour que les deux définitions soient équivalentes sont celles pour que $\Delta u = \Delta U$. Il suffit que la suite (1) soit normalement dense.

46. Dans le cas des fonctionnelles de degré quelconque, on peut généraliser le résultat précédent en s'appuyant sur la théorie des fonctionnelles harmoniques, que nous développerons plus loin. Nous verrons que :

1° Une fonctionnelle harmonique, uniformément continue à l'inté-

rieur d'une sphère, est bien définie par ses valeurs à la surface; étant donnée une fonctionnelle uniformément continue, définie sur la surface, il existe une fonctionnelle harmonique et une seule, continue à l'intérieur de la sphère, et égale sur sa surface aux valeurs données;

2° La valeur d'une telle fonctionnelle au centre de la sphère est égale à la moyenne des valeurs qu'elle prend sur la surface.

Ces résultats sont vrais aussi bien au point de vue de l'espace fonctionnel qu'au point de vue de l'espace Ω. Si la suite (1), qui définit le passage d'un point de vue à l'autre, est normalement dense, les fonctionnelles harmoniques sont les mêmes à l'un et l'autre point de vue. La moyenne d'une fonctionnelle uniformément continue sur une sphère, définie comme étant la valeur au centre de la fonctionnelle harmonique égale sur la surface à celle donnée, est donc la même à l'un et l'autre point de vue.

L'identité des deux notions de moyenne est donc établie, dans ce cas de la sphère, moyennant les hypothèses que la fonctionnelle considérée soit uniformément continue, et que la suite (1) soit normalement dense.

47. Un autre procédé consiste à établir que les formules de Gateaux, relatives au cas des fonctionnelles de la forme

$$(19)\quad U = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \varphi[x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_p), t_1, t_2, \ldots, t_p]\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_p,$$

sont valables à notre nouveau point de vue et qu'il en est de même pour la forme plus générale, considérée n° 18, obtenue en n'intégrant que sur une surface située dans le volume d'intégration précédent, du moins en imposant à ces surfaces la condition qu'aucun des t ne reste constant (sinon la fonctionnelle U ne serait pas continue). Les deux notions de moyenne reviendront alors au même, dans le cas de la sphère, pour les « polynomes généralisés », sommes de fonctionnelles de cette forme, et pour les séries uniformément convergentes de tels polynomes, c'est-à-dire pour une catégorie très étendue de fonctionnelles uniformément continues.

Or les formules de Gateaux, d'après le n° 19, reposent essentiellement :

1° Sur la loi de probabilité de $x(\tau)$, d'où résulte que $\varphi[x(\tau)]$ a

pour valeur moyenne

$$(20)\qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi;$$

2° Sur l'indépendance des lois de probabilité de $x(\tau_1)$, $x(\tau_2)$, ..., $x(\tau_p)$, en désignant par τ_1, τ_2, ..., τ_p des nombres *distincts* de l'intervalle (0, 1).

Il suffit de démontrer que notre nouveau point de vue ne change rien en ce qui concerne ces lois.

Pour avoir la loi de probabilité de

$$x(\tau) = a_1 f_1(\tau) + a_2 f_2(\tau) + \ldots + a_n f_n(\tau) + \ldots$$

dans la sphère Σ, il faut d'abord chercher celle de

$$(21)\qquad x_n(\tau) = a_1 f_1(\tau) + a_2 f_2(\tau) + \ldots + a_n f_n(\tau)$$

dans la sphère Σ_n. Or $x_n(\tau)$ est la distance à un plan, multipliée par $\sqrt{n\mathrm{F}_n(\tau)}$; sa loi de probabilité est celle relative à la distance à un plan, dans la sphère de rayon $\mathrm{R}\sqrt{n\mathrm{F}_n(\tau)}$. Si $\mathrm{F}_n(\tau)$ tend vers 1, on arrive donc à la même loi de probabilité qu'au n° 19. Comme $\mathrm{F}_n(\tau)$ converge seulement en moyenne vers 1, il peut y avoir exception pour certaines valeurs de τ, constituant un ensemble de mesure nulle. Mais cela ne peut faire aucune différence pour l'étude des fonctionnelles continues, qui ne peuvent pas dépendre des valeurs de x pour les points d'un tel ensemble. Ainsi, pour une fonctionnelle du type

$$(22)\qquad \int_0^1 \varphi[x(t), t]\,dt,$$

la formule de Gateaux est certainement applicable. C'est seulement pour des fonctionnelles dépendant de certains points particuliers, telles que $\varphi[x(\tau)]$, qu'il peut arriver que cette formule ne s'applique pas à notre nouveau point de vue.

Cherchons maintenant si les lois de probabilités de $x(\tau_1)$, $x(\tau_2)$, ..., $x(\tau_p)$ sont indépendantes, τ_1, τ_2, ..., τ_p désignant des nombres, tous différents, de l'intervalle (0, 1).

Nous savons que les distances à p plans d'un point de la sphère Σ ont des lois de probabilités indépendantes, à condition que ces plans soient distincts. Or deux de ces plans, correspondant à des valeurs t et τ du paramètre t, étant les limites des plans $\mathrm{F}_n(t) = 0$ et $\mathrm{F}_n(\tau) = 0$ de l'espace E_n, leur angle θ est la limite de l'angle θ_n défini par la

formule

$$\cos\theta_n = \frac{F_n(t.\,\tau)}{\sqrt{F_n(t)\,F_n(\tau)}},$$

et il n'y aura aucune difficulté si cette limite existe et n'est pas nulle, ou du moins si θ_n reste, quand n augmente indéfiniment, supérieur à un nombre positif ε (et inférieur à $\pi - \varepsilon$).

Or $F_n(t)$ et $F_n(\tau)$ convergeant en moyenne vers 1, et $F_n(t, \tau)$ tendant en général vers zéro, puisque t et τ sont différents, $\cos\theta_n$ tend *en général* vers zéro, et θ_n vers $\frac{\pi}{2}$.

Supposons la suite (1) normalement dense. Les points exceptionnels t, τ (autres que ceux de la droite $t = \tau$), pour lesquels il n'en serait pas ainsi, constituent un ensemble de mesure nulle en projection sur chacun des deux axes. Comme nous ne considérons que des fonctionnelles continues, on peut changer les valeurs de $x(t)$ pour les points d'un tel ensemble sans changer la valeur de la fonctionnelle, et il est indifférent que les lois de probabilité de $x(t)$ et $x(\tau)$, t et τ étant deux de ces points, ne soient pas indépendantes. Le théorème énoncé est donc démontré.

Plaçons-nous maintenant dans le cas des suites également denses; les lois de probabilité de $F(t)$ et $F(\tau)$ peuvent alors cesser d'être indépendantes pour certaines lignes exceptionnelles. Les formules de Gateaux, et par conséquent notre théorème sur l'identité des deux définitions de la moyenne, subsistent si la fonctionnelle U est normale, c'est-à-dire si l'intégrale (19) généralisée ne contient pas de groupes de points distincts jouant un rôle particulier, et même dans le cas plus général où sa variation seconde a la forme normale, c'est-à-dire si l'intégrale (19) généralisée ne contient pas de couples de *deux valeurs distinctes de* t, soit t et τ, jouant un rôle particulier; cela signifie que l'intégration par rapport à t et τ (celles par rapport aux autres variables t_i étant supposées effectuées) est effectuée dans une aire ou sur la ligne $t = \tau$, mais pas sur une ligne exceptionnelle; il importe peu alors que pour les points d'une telle ligne les lois de probabilité de $x(t)$ et $x(\tau)$ cessent d'être indépendantes. Le résultat subsiste encore, naturellement, si $\delta^2 U$ n'étant pas normale, sa définition introduit de telles lignes exceptionnelles, mais qu'elles soient distinctes des lignes exceptionnelles relatives à la suite (1).

CHAPITRE IV.

LA MESURE DES VOLUMES ET DES SURFACES ET LA GÉOMÉTRIE DES SURFACES DANS L'ESPACE FONCTIONNEL. APPLICATIONS A LA NOTION DE MOYENNE.

SOMMAIRE : La mesure des volumes et des surfaces. — La notion d'intégrale. — La variation de l'aire d'une surface. — Relations entre un volume et la surface qui le limite. — Variation d'un volume. — Les variétés à $\omega - 2$ dimensions. — Décomposition en carrés d'une forme quadratique. — Forme normale de Gateaux. — Forme normale quelconque. — Forme générale. — Le volume de l'ellipsoïde. — Les sections planes de l'ellipsoïde. — L'indicatrice et la courbure totale d'une surface. — La courbure géodésique totale et le théorème de Gauss. — Propriétés des surfaces parallèles. — Propriétés des contours parallèles tracés sur une surface. — La notion de valeur moyenne dans le cas des surfaces convexes. — Classification des surfaces et des volumes au point de vue de l'aspect de la notion de moyenne. — Remarques diverses.

48. **La mesure des volumes et des surfaces.** — Nous avons vu au Chapitre II que la mesure d'un volume ou d'une surface était en général nulle ou infinie, et pour cette raison, aux notions de volumes et d'intégrales multiples, nous avons substitué celle de moyenne, qui conserve un sens. Il peut pourtant être utile de parler de volumes et de surfaces comme de quantités mesurables, et d'employer la notation d'intégrale de volume ou de surface. Cela est possible dans les conditions suivantes :

Si la $n^{\text{ième}}$ section V_n d'un volume V a pour mesure $\varphi(n)$, on peut dire, en employant la notation des nombres transfinis, que V a pour mesure $\varphi(\omega)$, la notation $\varphi(\omega)$ désignant l'ordre de grandeur de $\varphi(n)$ pour n infini. Si les volumes V et V′ sont semblables, leur rapport d'homothétie étant $k > 1$, les mesures de V_n et V'_n seront $\varphi(n)$ et $k^n\varphi(n)$, et à la limite on représentera par $\varphi(\omega)$ et $k^\omega\varphi(\omega)$ les ordres de grandeur respectifs de V et V′. Cette notation est com-

mode pour indiquer que ce ne sont pas des volumes ayant simplement des valeurs différentes, mais que leurs ordres de grandeur sont différents, le premier étant négligeable devant le second.

Pourtant une précaution est à prendre. Les mêmes considérations s'appliquant aux volumes et aux surfaces, il peut y avoir lieu d'écrire des relations entre les volumes, les surfaces et les longueurs. Mais nous savons que deux points de l'espace E_n, $n^{\text{ième}}$ section de l'espace fonctionnel au sens de Gateaux, dont la distance comptée dans l'espace fonctionnel est r, ont pour distance dans l'espace E_n, non r, mais $r_n = r\sqrt{n}$; ainsi une sphère de rayon R a pour $n^{\text{ième}}$ section une sphère de rayon $R\sqrt{n}$. Si l'on voulait définir les longueurs, comme les surfaces et les volumes, par l'ordre de grandeur des grandeurs correspondantes dans l'espace E_n, on serait conduit à une définition de la distance différente de celle étudiée jusqu'ici.

On échappe aisément à cette difficulté en remplaçant la figure considérée de l'espace E_n par une figure semblable *réduite* dans le rapport de $\sqrt{n}$ à 1. Le volume de la sphère de rayon R sera alors mesuré par l'ordre de grandeur dans l'espace E_n de la sphère de rayon R, et non $R\sqrt{n}$. Cela peut être commode de dire que la $n^{\text{ième}}$ section de la sphère de rayon R ayant l'origine pour centre a pour *rayon réduit* R.

On arriverait directement à un résultat analogue en prenant la $n^{\text{ième}}$ section au sens du Chapitre III, n° 42. La $n^{\text{ième}}$ section d'une sphère de rayon R est alors une sphère de rayon R si le centre est à l'origine, en tout cas de rayon R_n tendant vers R, et du même ordre de grandeur que la sphère de rayon R, à un facteur près de la forme $(1+\varepsilon)^n$, ε tendant vers zéro.

Mais on peut difficilement en calcul fonctionnel prendre ce point de vue comme définition de la mesure d'un volume. Sans doute la notion de l'espace fonctionnel rapporté à une infinité dénombrable de coordonnées rectangulaires facilite la conception des notions de volumes et de surfaces. Mais nous savons par le Chapitre III que le choix des coordonnées rectangulaires ou même l'ordre dans lequel on considère les coordonnées d'un système déterminé peut influer sur la valeur de la moyenne, c'est-à-dire sur la valeur relative des différentes parties d'un volume. La mesure d'un volume à ce point de vue n'aurait donc pas une expression bien définie. La plupart des

considérations qui suivent sont valables avec les différentes définitions possibles. Mais, lorsque nous voudrons préciser une définition déterminée, nous prendrons celle qui se rattache au point de vue de Gateaux, avec la modification qui vient d'être indiquée, qui consiste à remplacer la $n^{\text{ième}}$ section par la section réduite correspondante.

49. La mesure d'une sphère de rayon 1 est, d'après le n° 4,

$$\frac{1}{\sqrt{\omega\pi}}\left(\sqrt{\frac{2\pi e}{\omega}}\right)^{\omega}.$$

Il n'y a aucun inconvénient à la prendre comme unité de volume, à condition de modifier en conséquence les unités de mesure des surfaces et différentes sortes de variétés situées dans l'espace fonctionnel. En désignant par $\mathcal{V}_p$ la mesure d'une variété à un nombre fini p de dimensions, et par $\mathcal{V}_{\omega-p}$ la mesure d'une variété à $\omega - p$ dimensions, définie, dans une région finie de l'espace fonctionnel, par p conditions d'égalité, toutes les relations que nous aurons à écrire entre les mesures de ces différentes sortes de variétés seront du type

$$\mathcal{V}_\omega = \mathcal{V}_{\omega-p}\mathcal{V}_p.$$

Elles seront homogènes par rapport à l'ensemble des quantités $\mathcal{V}_\omega$, $\mathcal{V}_{\omega-1}$, $\mathcal{V}_{\omega-2}$, ... On peut alors adopter pour les volumes $\mathcal{V}_\omega$ d'une part, pour les longueurs d'autre part, telles unités qu'on voudra. Les mesures des volumes du type $\mathcal{V}_p$ résultent d'une manière bien déterminée de l'unité de longueur, tandis que celles des volumes du type $\mathcal{V}_{\omega-p}$ dépendent à la fois de l'unité de longueur et de l'unité de volume du type $\mathcal{V}_\omega$.

Pour les longueurs, nous conserverons bien entendu notre définition habituelle. Pour les volumes du type $\mathcal{V}_\omega$, nous prendrons comme unité la sphère du rayon 1.

50. Un volume fini de l'espace fonctionnel, mais assez grand pour comprendre une petite sphère à son intérieur [1], a sa mesure com-

---

[1] Pour comprendre l'utilité de ces restrictions, remarquons que le volume limité par la surface $\int_0^1 |x|^p dt$ est infini, n'étant intérieur à aucune sphère, si $p > 2$, et est au contraire nul, ne comprenant aucune sphère à son intérieur, si $p < 2$.

prise entre deux expressions de la forme r^{ω} et R^{ω}. On doit donc s'attendre à ce que les volumes que nous avons à considérer soient fréquemment du type $c\omega^p a^{\omega}$.

L'ordre de grandeur d'un tel volume est défini par a, que nous appellerons *rayon de la sphère équivalente* à ce volume; d'une manière précise, le rayon de la sphère égale à sa $n^{\text{ième}}$ section tend vers a. On peut se demander s'il est utile, à côté de a^{ω}, de conserver le facteur $c\omega^p$. La réponse est évidemment affirmative. Nous avons vu par exemple que la moyenne d'une fonctionnelle définie dans un cylindre limité est en général effectivement la moyenne de valeurs différentes qu'elle prend dans des portions de volumes du même ordre de grandeur, et que l'on ne peut comparer qu'en tenant compte d'une manière précise du facteur c.

On peut d'autre part indiquer des exemples qui donnent lieu à des difficultés assez sérieuses. Considérons une sphère de rayon R. Le plan E_n, $n^{\text{ième}}$ section de l'espace fonctionnel, ne contenant en général pas exactement son centre, la coupe suivant une sphère de rayon réduit R_1, dont on peut seulement dire qu'il tend vers R en croissant constamment, mais on peut placer le centre de la sphère de manière que R_1 tende vers R aussi lentement qu'on veut. Le rapport $\left(\frac{R_1}{R}\right)^n$ de la $n^{\text{ième}}$ section de la sphère considérée et de celle d'une sphère de même rayon ayant l'origine pour centre peut donc ne pas tendre vers 1, ou même tendre vers zéro. Deux sphères de même rayon n'auraient pas des volumes égaux. Une telle conclusion est inadmissible.

Comme la difficulté provient de ce que le plan E_n ne coupe pas la sphère suivant sa plus grande section, on peut y échapper *en appelant $n^{\text{ième}}$ section d'un volume, non sa section par le plan* E_n, *mais sa projection sur le plan* E_n [1]. On obtiendrait peut-être

---

[1] Voici une autre difficulté qui se résout de la même manière. Soit le cylindre de révolution $r^2 - \alpha^2 = 1$, α désignant la distance à un plan. Le plan E_n faisant avec l'axe du cylindre un angle très petit ε, en général non nul, la section du cylindre par ce plan est un ellipsoïde ayant un axe égal à $\frac{1}{\sin\varepsilon}$, et les autres égaux à 1; le rayon de la sphère équivalente est $(\sin\varepsilon)^{-\frac{1}{n}}$; en général, ε ne tend pas vers zéro assez rapidement pour qu'il devienne infini, et la valeur limite de ce rayon est une fonction de la direction de l'axe du cylindre. Au contraire, en prenant la projection du cylindre sur le plan E_n (ce plan ne pouvant être perpendiculaire à l'axe

de cette manière une meilleure définition de la notion de volume. Dans la suite, nous n'aurons pas besoin de distinguer les deux définitions, et nous adopterons plutôt la première, qui facilite en général l'exposé sans rien changer d'essentiel aux résultats.

51. Les facteurs de la forme ω^p semblent n'intervenir que rarement dans la comparaison des volumes, les facteurs essentiels à considérer étant c ou a^ω suivant qu'ils sont du même ordre de grandeur ou non. Par contre, les facteurs de la forme ω^p jouent un rôle essentiel dans la comparaison des volumes et des surfaces.

Dans l'espace E_n, la relation entre le volume $\mathcal{V}_n$ et la surface $\mathcal{S}_n$ d'une sphère de rayon R est

$$\mathcal{S}_n = \frac{n}{R}\mathcal{V}_n.$$

A la limite, dans l'espace fonctionnel, on a

$$\mathcal{S} = \frac{\omega}{R}\mathcal{V}.$$

Le volume de la sphère, avec l'unité choisie, étant R^ω, sa surface sera représentée par $\omega R^{\omega-1}$.

On trouve de même le volume $\mathcal{V}_{\omega-1}$ de la sphère de rayon R dans une variété linéaire à $\omega - 1$ dimensions, ou section diamétrale de la sphère de l'espace fonctionnel. Il suffit de former le rapport $\frac{\mathcal{V}_{n-1}}{\mathcal{V}_n}$, qui a pour valeur principale $\frac{1}{R}\sqrt{\frac{n}{2\pi}}$, de sorte qu'il vient

$$\mathcal{V}_{\omega-1} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\sqrt{\omega}\,R^{\omega-1}.$$

---

que pour un nombre fini de valeurs de n, puisque ε tend vers zéro), la $n^{\text{ième}}$ section est un cylindre, dont le volume est infini. Le rayon de la sphère équivalente à un cylindre de l'espace fonctionnel est alors toujours infini; cette conception, à ce point de vue plus satisfaisante, donne encore lieu à des difficultés (*voir* n° 83). En réalité, ce rayon doit être considéré comme indéterminé.

Pour un volume fini et convexe, les deux conceptions sont équivalentes, non au point de vue de l'évaluation du volume, mais pour le calcul de la moyenne d'une fonctionnelle uniformément continue. Dans le cas d'une sphère, par exemple, peu importe que l'on considère le plan de la section E_n, ou le plan parallèle passant par le centre; la différence des valeurs moyennes relatives aux deux plans tend vers zéro. Ce n'est que si l'on avait à prendre la moyenne dans un volume constitué par exemple par l'ensemble de deux sphères de même rayon, que la distinction indiquée deviendrait essentielle pour le calcul de la moyenne.

On en déduit que la variété qui limite cette sphère, ou section diamétrale de la surface de la sphère de l'espace fonctionnel, a pour mesure

$$\mathcal{S}_{\omega-1} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\,\omega^{\frac{3}{2}}\,R^{\omega-2}.$$

Il était d'ailleurs aisé de prévoir que les mesures de $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}_{\omega-1}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}_{\omega-1}$ sont d'ordres de grandeur croissants. Ainsi la couronne comprise entre les sphères de rayon R et $R - dR$, inférieure évidemment à $\mathcal{S}\,dR$, constitue, quelque petit que soit dR, presque tout le volume $\mathcal{V}$; il faut donc que $\mathcal{S}$ soit d'un ordre de grandeur supérieur à $\mathcal{V}$.

De même la portion de $\mathcal{V}_{\omega-1}$, située à une distance du centre supérieure à $R - dR$, et qui constitue presque toute cette région, est la projection de la portion correspondante de la demi-sphère $\frac{\mathcal{S}}{2}$, le rapport des éléments correspondants étant aussi petit qu'on le veut, si dR est assez petit. Le rapport $\frac{\mathcal{V}_{\omega-1}}{\mathcal{S}}$ est donc infiniment petit.

Un cylindre circonscrit à la sphère et de hauteur 1 a pour volume $\mathcal{V}_{\omega-1}$ et pour surface $\mathcal{S}_{\omega-1}$. Or il a sur une hauteur finie une section que la sphère n'a que sur une hauteur infiniment petite, les sections voisines devenant immédiatement négligeables devant la section maxima. Il en résulte que ce volume $\mathcal{V}_{\omega-1}$ et cette surface $\mathcal{S}_{\omega-1}$ sont d'ordres de grandeur respectivement supérieurs à ceux du volume $\mathcal{V}$ ou de la surface $\mathcal{S}$ de la sphère de l'espace fonctionnel.

52. **La notion d'intégrale.** — La notion de volume étant définie, il est facile d'arriver à la notion d'intégrale.

Divisons un volume V en volumes partiels $V_1, V_2, \ldots, V_p$, de mesures $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots, \mathcal{V}_p$. Soient u une fonctionnelle bornée, et u_1, $u_2, \ldots, u_p$ ses valeurs en des points choisis respectivement dans les volumes $V_1, V_2, \ldots, V_p$. Posons

$$s = \mathcal{V}_1 u_1 + \mathcal{V}_2 u_2 + \ldots + \mathcal{V}_p u_p.$$

Supposons la loi de division adoptée telle que, pour p assez grand, on arrive, si petit que soit le nombre positif ε, à ce que les différences des valeurs de u en deux points d'un même volume V_i ne puissent pas dépasser ε. En subdivisant ces volumes V_i, et en for-

mant à l'aide des nouveaux volumes partiels obtenus une somme σ analogue à s, on a évidemment

$$|\sigma - s| \leqq \mathcal{V}\varepsilon.$$

Considérons de même une division en volumes $V'_1, V'_2, \ldots, V'_q$ de mesures $\mathcal{V}'_1, \mathcal{V}'_2, \ldots, \mathcal{V}'_q$ tels que dans un même volume V' la différence de deux valeurs de u ne dépasse pas ε, et posons

$$s' = \mathcal{V}'_1 u'_1 + \mathcal{V}'_2 u'_2 + \ldots + \mathcal{V}'_q u'_q,$$

u'_j étant une valeur prise par u dans le volume V'_j. Prenant maintenant un nouveau mode de division constitué par des volumes dont chacun appartient à un même volume V_i et un même volume V'_j, on est conduit à une somme σ, différant de moins de $\mathcal{V}\varepsilon$ aussi bien de s que de s', ce qui prouve que l'on a

$$|s - s'| \leqq 2\mathcal{V}\varepsilon.$$

De cette formule résulte que $\frac{s}{\mathcal{V}}$ a, quand ε tend vers zéro, une limite qui ne dépend, ni des modes de division que l'on considère successivement, ni du choix de la valeur u_i relative à chaque volume V_i. Cette limite est la *valeur moyenne* de u dans le volume V ; son produit par $\mathcal{V}$, qui représente l'ordre de grandeur de la somme s et est à un facteur fini près, si la valeur moyenne de u n'est pas nulle, du même ordre de grandeur que $\mathcal{V}$, est l'*intégrale de u dans le volume* V. Nous la représenterons par la notation

$$\int_V^{(\omega)} u \, d\mathcal{V},$$

l'indice supérieur, mis entre parenthèses, indiquant le nombre de dimensions du domaine d'intégration, ou ordre de l'intégrale.

53. **Remarques.** — 1° La définition de la moyenne qui précède se ramène aisément à celles des Chapitre II et III. Pour définir les valeurs relatives des différents volumes V_i, il faut considérer leurs $n^{\text{ièmes}}$ sections, et pourvu qu'on adopte dans les deux cas la même définition de la $n^{\text{ième}}$ section, cela revient au même de se placer au point de vue qui précède, ou à celui des Chapitres II et III. La véri-

fication de ce fait par un raisonnement rigoureux ne présente aucune difficulté.

L'existence de la notion d'intégrale est donc bien établie dans les cas où nous avons pu former effectivement la valeur moyenne d'une fonctionnelle. Il reste intéressant de généraliser la théorie classique de l'intégrale définie en établissant l'existence de l'intégrale, en partant seulement de conditions relatives au mode de continuité de la fonctionnelle intégrée et de la surface limitant le volume V. Nous reviendrons sur cette question au Chapitre VI.

2° Lorsqu'on définit l'intégrale d'une fonction continue dans l'espace ordinaire, ou dans l'espace à n dimensions, il est indifférent de prendre des volumes V_i ayant leurs dimensions très petites dans tous les sens, ou ayant certaines dimensions finies. L'essentiel est que dans chacun de ces volumes les valeurs extrêmes de la fonction intégrée diffèrent de moins de ε. Si l'on prend les volumes V_i très petits dans tous les sens, on obtient la définition classique de l'intégrale définie. Si l'on prend des volumes ayant certaines dimensions finies, par exemple ceux limités par les surfaces de niveau $u =$ const., on est conduit au point de vue de M. Lebesgue, qui permet l'extension de la notion d'intégrale à certaines fonctions discontinues.

Dans l'espace fonctionnel, il n'est pas possible de diviser un volume fini V en un nombre fini de volumes ayant leurs dimensions très petites dans tous les sens. Ainsi il n'est pas possible de diviser une sphère de rayon 1 en volumes dont chacun soit intérieur à une sphère de rayon donné $\varepsilon < 1$; le volume de la sphère de rayon 1 est en effet supérieur à celui d'un nombre quelconque de sphères de rayon ε. Il en résulte que, si l'on veut que l'aspect de la théorie soit celui du n° 52, le nombre de termes de chaque somme s étant fini, le point de vue de M. Lebesgue est seul possible.

3° Le théorème de la moyenne, les théorèmes relatifs à l'addition, soit des volumes V, soit des fonctions intégrées, se généralisent sans difficulté. Il est aisé également de définir l'intégrale d'une fonctionnelle u ne restant pas finie, en se plaçant au point de vue de M. Lebesgue, c'est-à-dire en négligeant d'abord les portions du volume ou $|u| < \mathfrak{M}$, puis en faisant augmenter $\mathfrak{M}$ indéfiniment.

4° Les considérations qui précèdent s'étendent aisément aux intégrales de surface, et d'une manière générale aux variétés $\omega - p$ fois

étendues. Nous désignerons de telles intégrales par la notation

$$\int_{V}^{(\omega-p)} u\, d\mathcal{V}.$$

Nous emploierons en principe les expressions *volumes* ou *intégrales de volumes*, dans le cas des régions à ω dimensions, portions de l'espace fonctionnel définies par des conditions d'inégalité, ou dans le cas des régions analogues situées dans une variété linéaire, variété dont la géométrie est identique, soit à celle de l'espace fonctionnel, soit à celle d'un espace à un nombre fini de dimensions. Dans le cas des variétés à $\omega - 1$ dimensions, nous emploierons les expressions *surfaces*, *aires* et *intégrales de surfaces*. Dans le cas des variétés à $\omega - 2$ dimensions, limitant une portion de surface, nous emploierons les expressions *contours*, *mesures des contours*, *intégrales étendues aux contours*.

54. **La variation de l'aire d'une surface.** — Considérons une surface S, qui se déforme, chacun de ses points ayant un déplacement normal dont nous désignerons la grandeur par $\delta\nu$. Nous désignerons par $\mathcal{S}$ l'aire de la surface et par K la courbure moyenne en chaque point. Dans l'espace E_n, en employant les mêmes notations affectées de l'indice n, et en convenant toujours d'appeler *courbure moyenne* non la somme, mais la moyenne des courbures correspondant aux directions principales, la variation d'un élément d'aire $d\mathcal{S}_n$ est

$$(1) \qquad \delta\, d\mathcal{S}_n = -(n-1)\mathrm{K}_n\, \delta\nu\, d\mathcal{S}_n,$$

ce qu'on peut écrire, si la surface dépend d'un paramètre λ,

$$(2) \qquad \frac{d \log d\mathcal{S}_n}{d\lambda} = -(n-1)\mathrm{K}_n \frac{\delta}{d\lambda},$$

ou, si η_n est le rayon de la sphère de l'espace E_{n-1} dont le volume est $d\mathcal{S}_n$,

$$(3) \qquad \frac{d \log \eta_n}{d\lambda} = -\mathrm{K}_n \frac{\delta\nu}{d\lambda}.$$

Lorsque n devient infini, on est conduit à écrire, dans l'espace

fonctionnel, les formules analogues

$$(4) \qquad \delta\, d\mathcal{S} = -(\omega - 1)\, K\, \delta\nu\, d\mathcal{S},$$

$$(5) \qquad \frac{d \log d\mathcal{S}}{d\lambda} = -(\omega - 1)\, K \frac{\delta\nu}{d\lambda},$$

$$(6) \qquad \frac{d \log \eta}{d\lambda} = -K \frac{\delta\nu}{d\lambda}.$$

La dernière de ces formules a seule une signification précise; les deux premières ne sont que des manières symboliques d'écrire la formule (6). Il est naturel de trouver, pour la vitesse de variation relative de $d\mathcal{S}$, une valeur infinie, puisque, non seulement cette aire varie, mais son ordre de grandeur varie, si K n'est pas nul, la variation de η étant donnée par la formule (6); si l'on avait pour $\frac{d \log d\mathcal{S}}{d\lambda}$ une expression finie, cela indiquerait que le rapport $\frac{d\mathcal{S}'}{d\mathcal{S}}$ ($d\mathcal{S}'$ désignant l'aire déformée) n'est ni nul, ni infini.

Lorsque $K = 0$, la vitesse de variation de η est nulle; mais cela ne signifie pas que l'aire reste constante. Les seconds membres des formules (4) et (5) sont de la forme indéterminée $0 \times \infty$, et la dérivée logarithmique $\frac{d \log d\mathcal{S}}{d\lambda}$ peut, suivant les cas, être nulle, finie ou infinie. Si par exemple, en désignant par $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, des coordonnées orthogonales dans l'espace fonctionnel, on considère la portion de surface du cylindre de révolution

$$a_{p+1}^2 + a_{p+2}^2 + \ldots + a_{p+q}^2 + \ldots = R^2,$$

intérieure au cylindre

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_p^2 = \lambda^2,$$

son aire, lorsque λ varie, R restant fixe, est évidemment proportionnelle à λ^{p-1}. Dans l'espace à n dimensions, *le rayon de la sphère équivalente à cette aire* [1] varie comme $\lambda^{\frac{p-1}{n-1}}$, facteur qui tend vers 1

[1] Aussi bien dans l'espace E_n que dans l'espace fonctionnel, nous emploierons cette expression pour désigner le rayon de la sphère dont la section par un plan contenant le centre a l'aire considérée. Dans l'espace fonctionnel, l'aire de cette section et l'aire de la surface de la sphère sont dans le rapport $\sqrt{\frac{1}{2\pi\omega}}$; et il est indifférent de considérer l'une ou l'autre, les facteurs de la forme a^ω intervenant seuls dans le calcul du rayon.

quand n devient infini. Dans l'espace fonctionnel, le rayon considéré reste donc constant (et égal à R), comme l'indique la formule (6) (le cylindre considéré, n'ayant que p rayons de courbures finis, est une surface minima); mais l'aire elle-même varie comme λ^{p-1}.

55. Considérons maintenant la variation de l'aire finie $\mathcal{S}$. On peut être tenté d'écrire qu'elle a la valeur

$$(7) \qquad -(\omega-1)\int_{S}^{(\omega-1)} K\,\delta\nu\,d\mathcal{S},$$

et, cette expression étant dépourvue de sens par elle-même, de penser qu'elle signifie que la dérivée logarithmique du rayon de la sphère équivalente à S est égale à la valeur moyenne de $K\frac{\delta\nu}{d\lambda}$. Il n'en est rien, et il y a lieu de n'employer qu'avec précaution des expressions de la forme (7).

Supposons en effet que $K\frac{\delta\nu}{d\lambda}$ n'ait pas la même valeur dans presque toute l'aire $\mathcal{S}$. Désignons par m_1 le plus grand nombre (algébriquement) tel qu'on ait, quelque petit que soit ε,

$$-K\frac{\delta\nu}{d\lambda} > m_1 - \varepsilon$$

dans une aire dont le rayon de la sphère équivalente ait la même valeur R que pour l'aire totale. Lorsque λ a une variation positive $d\lambda$, on obtient une aire déformée pour laquelle le rayon de la sphère équivalente a la valeur $R(1+m_1\,d\lambda)$. Pour aucune autre région de la surface, on ne peut avoir après déformation une aire comparable; en effet, pour toute autre région, ou bien le rayon de la sphère équivalente est inférieur à R, et, variant d'une manière continue, ne peut devenir égal à $R(1+m_1\,d\lambda)$; ou bien, ce rayon étant R, on a

$$-K\frac{\delta\nu}{d\lambda} < m_1,$$

et il croît moins vite que pour la région considérée d'abord, qui constitue ainsi, après la déformation, presque toute la surface. La dérivée logarithmique de R, lorsque λ *croît*, est donc m_1.

Précisons le résultat obtenu. En désignant par R le rayon de la sphère équivalente à l'aire S, on a le droit de négliger des portions

de l'aire équivalentes à une sphère de rayon inférieur à R; les valeurs correspondantes de $K\frac{\partial\nu}{d\lambda}$ sont sans importance. Mais il faut tenir compte de toute valeur prise sur une aire pour laquelle le rayon de la sphère équivalente a la valeur R, bien qu'une telle aire puisse ne constituer qu'une fraction négligeable de l'aire totale, comme nous allons le voir par un exemple.

Répartissons les coordonnées a_2, a_3, ..., a_n (supposées rangées dans un ordre normal et a_1 étant laissé de côté) en deux groupes, dont le premier les contienne *presque tous*, mais dont le second en contienne une infinité. Nous entendons par là que, si n_1 et n_2 désignent respectivement les nombres des coordonnées a_i d'indice au plus égal à n appartenant à l'un et l'autre groupe, n_2 devient infini, mais de manière que $\frac{n_2}{n}$ tende vers zéro. Nous désignerons par b_1, b_2, ..., b_i, ... les coordonnées du premier groupe et par c_1, c_2, ..., c_i, ... celles du second groupe.

Prenons pour volume V le volume

$$b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_i^2 + \ldots < R^2,$$
$$c_1^2 + c_2^2 + \ldots + b_i^2 + \ldots < f^2(a_1),$$

et considérons les portions de ce volume limitées par des plans parallèles au plan $a_1 = 0$. Admettons que les systèmes de coordonnées rangés dans l'ordre normal jouent le même rôle dans les évaluations de volumes que dans les calculs de moyenne; l'ordre de grandeur des volumes ou aires considérés s'obtiendra en considérant leur section par le plan des $a_1 a_2 \ldots a_n$. L'aire de la section du volume V_n, $n^{ième}$ section de V, par un plan $a_1 = \text{const.}$, est évidemment proportionnelle à $R^{n_1} f^{n_2}(a_1)$. Pour n très grand, le deuxième facteur est négligeable devant le premier, et le rayon de la sphère équivalente à l'aire considérée est, dans l'espace fonctionnel, égal à R. Le volume V est donc découpé en tranches pour chacune desquelles le rayon de la sphère équivalente est le même; pourtant celle pour laquelle $f(a_1)$ est maximum est infiniment supérieure aux autres et compte seule pour le calcul de la moyenne d'une fonctionnelle.

Les mêmes circonstances se produisent pour les tranches découpées par les plans $a_1 = \text{const.}$ dans la surface S qui limite le volume V. Presque toutes ces tranches sont négligeables devant celle pour laquelle $f(a_1)$ est maximum, mais elles ont même rayon de

sphère équivalente, et il suffit qu'une de ces tranches soit dilatée un peu plus que les autres, lorsque λ varie, pour l'emporter infiniment sur elles dans le calcul de l'aire déformée, et de la dérivée de cette aire. Si par exemple, dans l'équation du volume V, lorsque λ croît, on remplace R par $R[1+\lambda g(a_1)]$, c'est la tranche rendant $g(a_1)$ maximum qui comptera seule dans le calcul de la variation de l'aire.

Ainsi, parmi les contours C définis sur une surface quelconque S par la condition $K\frac{\delta v}{d\lambda} = \text{const.}$, nous ne considérons que ceux pour lesquel le rayon de la sphère équivalente à C (ou à la portion d'aire voisine de C) a la valeur R. Désignons par m_1 et m_2 la plus grande et la plus petite valeur (algébriquement) de $-K\frac{\delta v}{d\lambda}$ sur les contours considérés. On a, d'après les considérations qui précèdent, qui s'étendent évidemment au cas où λ est négatif,

$$(8) \qquad \frac{d\log R}{d\lambda} = \begin{cases} m_1 & (d\lambda > 0), \\ m_2 & (d\lambda > 0). \end{cases}$$

Si l'on considère la courbe donnant R en fonction de λ, elle admet un point anguleux au point considéré, lorsque $m_1 > m_2$. Cela ne peut avoir lieu que pour des valeurs exceptionnelles de λ, et l'on voit qu'en général $m_1 = m_2$, c'est-à-dire que $K\frac{\delta v}{d\lambda}$ a presque partout la même valeur m, les portions d'aire pour lesquelles cette quantité n'est pas comprise entre $m-\varepsilon$ et $m+\varepsilon$, non seulement étant négligeables quelque petit que soit ε, mais ayant un rayon de sphère équivalente inférieur à R. Ce résultat constitue une vérification assez curieuse du théorème général du n° 15.

Si en particulier, pour une certaine valeur de λ, l'aire s est maxima, ou si elle varie sans que R varie, $K\frac{\delta v}{d\lambda}$ est nécessairement presque partout nul sur la surface correspondant à cette valeur.

56. Considérons un autre exemple, plus élémentaire que celui qui vient d'être considéré. Soit un faisceau linéaire simplement infini de sphères; leur intersection C est une sphère d'un plan à $\omega - 1$ dimensions; pour faciliter le langage, nous l'appellerons *cercle*. Prenons pour S une des portions de sphère limitée au cercle C, et désignons par θ l'angle sous lequel elle coupe le plan du cercle, considéré comme aigu ou obtus suivant que S est la plus petite ou la plus

grande des deux portions de sphère séparées par C; désignons par ρ le rayon C.

Si θ est aigu, l'aire S est concentrée près de C, et, en comparant son aire $\mathcal{S}$ à l'aire $\mathcal{S}_0$ de sa projection orthogonale sur le plan du cercle C, on a

$$\mathcal{S} = \frac{\mathcal{S}_0}{\cos\theta}.$$

Elle croît donc avec θ, le rapport $\frac{\mathcal{S}}{\mathcal{S}_0}$ devenant infini pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, mais le rayon R de la sphère équivalente reste égal à ρ, même pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ (*voir* la note du n° 54). Au contraire, pour θ obtus, S constitue presque toute la sphère de rayon $\frac{\rho}{|\cos\theta|}$, et R, égal à ce rayon, croît avec θ.

Si maintenant nous voulons appliquer les considérations du numéro précédent, il faut comparer les éléments des différentes sphères situés sur des trajectoires orthogonales à ces sphères, c'est-à-dire sur des cercles orthogonaux. Lorsque θ croît, chaque élément d'aire est remplacé par un élément d'aire plus grand, le rayon de la sphère équivalente à cet élément croissant. Mais il croît d'autant moins vite que l'élément considéré est plus près du cercle C, et, tant que le voisinage de ce cercle constitue presque toute la sphère, c'est-à-dire tant que θ ne dépasse pas $\frac{\pi}{2}$, on s'explique que cette aire croisse en restant du même ordre de grandeur, bien que ce soit une somme d'éléments pour chacun desquels l'ordre de grandeur aille en augmentant.

L'ordre de grandeur de chaque zone sphérique comprise entre deux plans très voisins parallèles à celui de C étant défini par son rayon, on s'explique que, dès que θ est obtus, apparaissent des zones qui l'emportent sur celle voisine de C, et que R augmente.

57. **Relations entre un volume et la surface qui le limite.** — Nous avons déjà observé qu'un volume V, de dimensions finies, est concentré sur la surface S qui le limite. Cette circonstance est tout à fait générale, que cette surface soit convexe ou non. En effet un volume V′, homothétique de V, le rapport d'homothétie étant inférieur à 1 et très voisin de ce nombre, est négligeable devant V. Les régions de V

extérieures à V′ constituent donc presque tout le volume V; or elles sont voisines de la surface S.

Pour mesurer V, on peut donc considérer ce volume comme formé d'éléments dV voisins de la surface S, ayant pour bases des éléments dS, et limités latéralement par des normales à cette surface; ils seront limités d'autre part vers l'intérieur de V à une surface S_1 voisine de S, et dont la détermination est sans importance; ce qui est à l'intérieur de cette surface peut être négligé.

D'autre part on peut se contenter de considérer les portions de la surface S pour lesquelles la courbure moyenne K est dirigée vers l'intérieur. Pour les autres, en effet, les éléments dV considérés s'élargissent lorsqu'on s'éloigne de la surface, vers l'intérieur, et en les prolongeant au delà de S_1, on a des éléments dV_1 plus grands que les éléments dV correspondants. Étant à l'intérieur de V, ils ne constituent par leur réunion qu'une portion négligeable du volume total, et il en est de même *a fortiori* des éléments dV correspondants.

Pour la même raison, on peut négliger les portions de surface pour lesquelles $K = 0$.

Considérons maintenant deux éléments égaux, dS et dS', pris dans la région pour lesquels K est positif, et cherchons à comparer les éléments correspondants dV et dV'. A cet effet, considérons-les comme décrits par des éléments d'une surface Σ, allant de S à S_1 quand le paramètre λ dont elle dépend varie de zéro à une valeur convenable, et définie par la condition que $K\frac{\delta\nu}{d\lambda} = 1$ sur toute la surface S. D'après la formule (6), les sections des éléments dV et dV' par chaque surface Σ sont du même ordre de grandeur ([1]), et si ces éléments ne sont pas égaux, c'est que leurs hauteurs ne sont pas égales, mais proportionnelles aux valeurs correspondantes de $\frac{1}{K}$; comme d'ailleurs les portions de volume non voisines de S sont négligeables, il importe peu que les surfaces Σ n'aient pas aux points correspondants même courbure moyenne que S; il n'y a qu'à considérer les courbures moyennes K et K′ des éléments dS et dS', et

([1]) Nous disons du même ordre de grandeur, et non égaux. En se plaçant dans l'espace E_n, et effectuant ensuite le passage du fini à l'infini, il est facile de lever l'objection résultant de cette circonstance et de rendre le raisonnement rigoureux.

l'on a

$$\frac{K\,d\mathcal{V}}{d\mathcal{S}} = \frac{K'\,d\mathcal{V}'}{d\mathcal{S}'},$$

$d\mathcal{S}$, $d\mathcal{S}'$, $d\mathcal{V}$, $d\mathcal{V}'$ désignant respectivement les mesures des éléments dS, dS', dV, dV'.

On peut en particulier appliquer ce résultat en prenant pour $d\mathcal{S}'$ un élément d'une sphère de rayon a. Le rapport $\frac{K'\,d\mathcal{V}'}{d\mathcal{S}'}$ a partout la même valeur sur la sphère; cette valeur est donc $\frac{\mathcal{V}'}{a\,\mathcal{S}'}$, $\mathcal{V}'$ et $\mathcal{S}'$ désignant le volume et la surface totale de la sphère. D'après le n° 51, cette valeur peut être désignée par ω, et il vient

$$d\mathcal{V} = \frac{d\mathcal{S}}{K\omega}, \tag{9}$$

et pour le volume total $\mathcal{V}$,

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{S}}{\omega}\,\mathfrak{M}\left(\frac{1}{K}\right), \tag{10}$$

$\mathfrak{M}$ désignant une moyenne sur la surface S.

De la formule (9) résulte immédiatement l'énoncé suivant :

La moyenne, dans un volume V, *d'une fonctionnelle uniformément continue, est égale à sa moyenne sur la surface* S *qui le limite, calculée en donnant à chaque élément de surface un poids proportionnel au produit de sa mesure par son rayon de courbure moyenne. On peut d'ailleurs ne tenir compte que des portions de surface pour lesquelles ce rayon est fini et dirigé vers l'intérieur.*

Remarquons que ces résultats supposent l'existence, sur presque toute la surface, de plans tangents déterminés, et continus à la Lipschitz (c'est-à-dire que les rayons de courbure principaux sont limités inférieurement). Ce n'est en effet qu'à cette condition que le volume situé entre S et S_1 sera, pour un choix convenable de S_1, décrit une fois et une seule par des éléments de normales à S.

Si par exemple nous considérons le volume compris entre un plan et une calotte sphérique, et comprenant moins de la demi-sphère, presque toute la surface est dans le voisinage des points anguleux et nos raisonnements ne s'appliquent pas. Nous constatons en effet qu'une surface minima, le plan, constitue une fraction finie de la

surface totale, ce qui n'est pas possible pour une surface régulière fermée.

58. **Variation d'un volume.** — Des remarques analogues à celles relatives à la variation des surfaces s'appliquent à la variation des volumes. Soit à étudier la variation de la mesure $\mathcal{V}$ d'un volume V limité par une surface S qui se déforme, ou, ce qui revient au même, le volume décrit par cette surface. On peut la représenter par l'expression

$$\int_S^{(\omega-1)} \delta\nu \, dS, \tag{11}$$

à condition de prendre les mêmes précautions que pour l'expression (7).

Nous savons que l'expression $-(\omega-1)K\delta\nu\, dS$ de la variation de dS indique que, si $K\delta\nu > 0$, l'aire déformée devient, dès que λ varie, négligeable devant l'aire initiale, de sorte que la variation de dS, pour une variation finie de λ, si petite soit-elle, est $-dS$. De même, l'expression $\delta\nu\, dS$ du volume élémentaire décrit par l'élément dS indique que, pour une variation finie de λ, on a le volume $\frac{dS}{K(\omega-1)}$, ou, ce qui revient au même, $\frac{dS}{K\omega}$, puisque ω et $\omega-1$ sont équivalents; on retrouve ainsi l'expression (9).

Le rayon de la sphère équivalente au volume V est, d'après la formule (10), égal à celui de la sphère d'aire équivalente à l'aire S. Sa variation est donc la même, et dépend des valeurs de $K\delta\nu$. Cela peut surprendre à première vue, l'expression $\delta\, d\mathcal{V} = \delta\nu\, dS$ ne contenant pas K; mais si l'on remplace dS par sa valeur $K\omega\, dV$ tirée de la formule (9), on a pour la variation $\delta\, d\mathcal{V}$ l'expression $K\omega\,\delta\nu\, d\mathcal{V}$ tout à fait analogue à l'expression (4) de $\delta\, dS$ et entraînant les mêmes conséquences.

59. **Les variétés à $\omega-2$ dimensions.** — Plaçons-nous d'abord dans l'espace E_n, et considérons un *contour* C, ou variété à $n-2$ dimensions, intersection de deux surfaces S et S'. En un point A de ce contour, désignons par AN et AN' les normales à S et à S', par Π le plan tangent à C, intersections des plans P et P' tangents à S et S', par AT une droite variable de ce plan. On peut étudier le contour C

en étudiant ses sections par les plans à 3 dimensions ATNN′; ce sont des courbes, admettant une normale principale AH, le plan ATH pour plan osculateur, et une courbure k que nous représenterons géométriquement par un vecteur v égal à k dirigé suivant AH.

Faisons décrire à AT le plan Π. Soit v_m la moyenne, au sens géométrique, du vecteur v, étant entendu que l'on accorde des poids égaux à des vecteurs décrivant des angles solides égaux; c'est une moyenne sur une sphère de l'espace à $n-2$ dimensions. Chaque vecteur v ayant pour projections sur AN et AN′ les courbures des sections des surfaces S et S′ par les plans ANT et AN′T, le vecteur v_m a pour projections les courbures moyennes K_1 et K'_1 de la section de S par le plan (Π, AN) et de celle de S′ par le plan (Π, AN′).

Nous appellerons la droite AH, qui porte ce vecteur, la *normale principale moyenne* du contour C; sa longueur K_m, *courbure moyenne* de ce contour; le plan déterminé par Π et cette normale, *plan osculateur moyen*.

Si θ et θ' désignent les angles de la normale principale moyenne avec AN et AN′, comptés positivement de AN vers AN′, et α l'angle de AN et AN′, on a

$$K_m = \frac{K_1}{\cos\theta} = \frac{K'_1}{\cos\theta'}, \tag{12}$$

$$\theta - \theta' = \alpha. \tag{13}$$

Les formules (12) généralisent le théorème de Meusnier; les formules (12) et (13) permettent de déterminer k, θ, et θ'. La construction géométrique du *centre de courbure moyenne* (situé à la distance $\frac{1}{k}$ sur la normale principale moyenne) est la même que dans l'espace ordinaire; M et M′ étant les points situés sur AN et AN′ aux distances $\frac{1}{K_1}$ et $\frac{1}{K'_1}$, ce centre est le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur MM′.

Ces différentes notions s'étendent sans peine au cas de l'espace fonctionnel. Dans ce cas, en vertu des résultats connus sur la moyenne d'une fonctionnelle sur une sphère, on remarque de plus que :

1° Le centre de courbure des sections de C par les plans ATNN′ sont *presque tous* confondus avec le centre de courbure moyenne; le

plan osculateur a presque toujours la même position; le rayon de courbure a presque toujours la même valeur;

2° Les nombres K_1 et K'_1 sont égaux aux courbures moyennes K et K′ de ces surfaces; les formules (12) s'écrivent donc

$$K_m = \frac{K}{\cos\theta} = \frac{K'}{\cos\theta'}; \tag{14}$$

les points M et M′ sont les centres de courbure moyenne des surfaces S et S′.

60. Des considérations analogues aux précédentes s'étendent aisément à la notion de courbure géodésique sur une surface.

Pour une courbe tracée sur la surface S, la courbure géodésique est la courbure de sa projection sur le plan tangent; elle est représentée par le vecteur v_g, projection du vecteur v sur ce plan.

Lorsqu'on considère les différentes courbes tracées sur S, sections d'un contour C de cette surface par tous les plans à trois dimensions contenant le plan ANN_1 normal à C, les vecteurs v_g ont tous même direction AN_1, située dans le plan tangent à S et normale à C. Leur moyenne est la projection du vecteur v_m, moyenne au sens géométrique des vecteurs v; c'est la *courbure géodésique moyenne* de C, projection de sa courbure moyenne, ou, ce qui revient au même, courbure moyenne de sa projection sur le plan tangent à S. Désignant sa grandeur par K_g, on a évidemment

$$K_g = K_m \sin\theta = K \operatorname{tg}\theta. \tag{15}$$

Nous désignerons par *géodésiques d'ordre* $\omega - 2$, ou simplement, lorsqu'il n'y aura pas ambiguïté, *géodésiques*, les variétés à $\omega - 2$ dimensions pour lesquelles $K_g = 0$. (On définirait de même les géodésiques de divers ordres; les remarques qui précèdent s'étendent en effet sans peine aux variétés à $\omega - p$ dimensions; on peut aussi les étendre aux variétés à p dimensions; mais dans ce cas, les deux remarques finales du numéro précédent ne s'appliquent pas.)

La formule (15) nous montre que, si la surface S n'est pas minima, une géodésique est une variété à $\omega - 2$ dimensions dont le plan osculateur moyen est normal à la surface.

D'après la formule (14), une surface minima, contenant un contour C dont la courbure moyenne n'est pas nulle, admet pour plan

tangent, en chaque point de C, le plan osculateur moyen de ce contour; réciproquement, si elle est tangente à ce plan, sa courbure moyenne est nulle pour les points de C. Si C est sur une surface S non minima, nous voyons que la condition nécessaire et suffisante pour les surfaces minima contenant C soient normales à S, est que C soit une géodésique de S.

On remarque que la condition imposée à une surface contenant C d'être minima entraîne que cette surface ait un plan tangent déterminé, comme si l'étude des surfaces minima dépendait d'une équation du premier ordre, et non du second. Des circonstances analogues joueront un grand rôle dans le Chapitre suivant. Dans l'espace à n dimensions, une surface minima Σ contenant un contour C peut de plus avoir un plan tangent arbitraire; mais celles qui touchent le plan osculateur moyen de C sont caractérisées par une circonstance particulière : elles ont avec la normale principale AH moyenne de C un contact du second ordre. Ainsi, la courbure moyenne étant la moyenne des courbures des sections normales de Σ tangentes à $n-1$ directions du plan P perpendiculaires deux à deux, on peut prendre $n-2$ directions dans le plan π tangent à C, la dernière étant AH; les courbures correspondantes sont nulles en moyenne dans chacun des deux groupes. Lorsque n devient infini, la courbure relative à une direction unique n'a plus d'importance dans le calcul de la moyenne; il est alors indifférent que la surface Σ ait avec AH un contact d'ordre 2; la condition pour que sa courbure moyenne soit nulle est que les courbures normales correspondant aux directions du plan Π soient nulles en moyenne, c'est-à-dire que le plan tangent à Σ soit le plan osculateur moyen de C.

61. L'étude de la déformation d'un contour sur une surface S est analogue à celle d'une surface dans l'espace. Il y a même identité, si S est un plan, rien ne distinguant la géométrie d'un plan à $\omega-1$ dimensions de celle de l'espace fonctionnel. On passe de là à une surface quelconque en assimilant chacun de ses éléments à un élément de plan; il en résulte des erreurs sur les angles ou des erreurs relatives sur les longueurs, qui sont infiniment petites du second ordre, et par suite sans influence sur les variations premières des quantités considérées. Toutes les considérations des n°s 54 à 58 s'appliquent donc, *mutatis mutandis;* précisons en particulier que

la notion de courbure moyenne d'une surface est remplacée par celle de courbure *géodésique* moyenne d'un contour.

En particulier, par extension des résultats qui terminent le n° 55, si une surface fermée S est décrite par un contour C dépendant d'un paramètre λ :

1° Sauf au plus pour certaines valeurs exceptionnelles de λ, la courbure géodésique moyenne de chaque contour C a presque partout la même valeur;

2° Il existe évidemment au moins une valeur de λ pour laquelle le voisinage de C constitue une fraction finie de la surface; pour le contour C correspondant, la courbure géodésique moyenne est presque partout nulle.

Remarquons aussi que si une portion S de surface, d'aire $\mathcal{S}$, est limitée par un contour C, de mesure $\mathcal{C}$, dont la courbure géodésique moyenne soit presque partout dirigée vers S, on a, par généralisation de la formule (10),

$$(16) \qquad \mathcal{S} = \frac{\mathcal{C}}{\omega - 1}\,\mathfrak{M}\left(\frac{1}{K_g}\right) = \frac{1}{\omega - 1}\int_C^{(\omega-2)} \frac{d\mathcal{C}}{K_g}.$$

62. **Décomposition en carrés d'une forme quadratique.** — Avant d'indiquer d'autres applications des notions de volume et d'aire, à l'étude du volume de l'ellipsoïde et de la courbure totale des surfaces, il est nécessaire de rappeler quelques résultats, dus à MM. D. Hilbert (1) et E. Schmidt (2), et rapidement devenus classiques, sur la décomposition en carrés d'une *forme quadratique*, c'est-à-dire d'une fonctionnelle entière et homogène du second degré. Pour plus de détails, ou pour les points qui seront indiqués sans démonstration, le lecteur peut se reporter au Mémoire de M. E. Schmidt ou aux Ouvrages déjà cités sur la théorie des équations intégrales (première partie, n° 100).

Si étant donnée une forme quadratique U, nous arrivons à trouver une suite de fonctions orthogonales et normales

$$f_1(t),\quad f_2(t),\quad \ldots,\quad f_n(t),\quad \ldots,$$

(1) D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (*Göttinger Nachrichten*, années 1904 et suiv.).

(2) Schmidt, Zur *Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen* (*Mathematische Annalen*, t. 63 et suiv.).

telle que

$$U = c_1 a_1^2 + c_2 a_2^2 + \ldots + c_n a_n^2 + \ldots,$$

$$\left[a_n = \int_0^1 f_n(t)\, x(t)\, dt\right],$$

la forme quadratique sera *décomposée en carrés*. Une telle décomposition n'est d'ailleurs pas toujours possible, comme nous allons le voir en cherchant à généraliser la théorie relative au cas des formes quadratiques de n variables.

Les directions des axes de coordonnées $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, ou *axes de la quadrique* $U = \text{const.}$, s'obtiennent en cherchant les points où cette quadrique et la sphère $r^2 = \text{const.}$ ont même plan tangent, c'est-à-dire où la variation $\delta(\lambda U - r^2)$ est identiquement nulle, λ étant un coefficient convenable. L'équation en $x(t)$ ainsi obtenue est en général une équation intégrale, naturellement linéaire et homogène.

63. **Forme normale de Gateaux.** — Plaçons-nous d'abord dans le cas où U a la forme normale de Gateaux

$$(17) \qquad U = \int_0^1 \int_0^1 \varphi(t, \tau)\, x(t)\, x(\tau)\, dt\, d\tau,$$

$\varphi(t, \tau)$ étant symétrique et de carré sommable. On a

$$\delta(\lambda U - r^2) = 2 \int_0^1 \delta\, x(t)\, dt \left[\lambda \int_0^1 \varphi(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau - x(t)\right].$$

Les fonctions $x(t)$ annulant cette variation sont donc les solutions de l'équation de Fredholm, homogène et à noyau symétrique

$$(18) \qquad x(t) = \lambda \int_0^1 \varphi(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau.$$

Il n'existe de solution non identiquement nulle de cette équation que si λ est une des racines

$$(19) \qquad \lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n, \quad \ldots$$

de son déterminant; ce déterminant étant une fonction entière de λ, ces racines, que l'on appelle *nombres fondamentaux* ou *caractéristiques* de l'équation (18), ou bien sont en nombre fini, ou bien

croissent indéfiniment. Dans la suite (19), nous supposerons chaque racine écrite un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité.

A une racine simple λ_n correspond une solution $f_n(t)$ de l'équation (18), définie à un facteur constant près. Nous supposerons ce facteur choisi de manière que la fonction $f_n(t)$ soit normale.

A h racines égales correspondent des solutions de l'équation (18), fonctions linéaires à coefficients arbitraires de h d'entre elles, qu'on peut supposer orthogonales et normales, et que nous ferons correspondre aux racines considérées.

A la suite des nombres fondamentaux correspond ainsi une suite de *solutions fondamentales*

$$f_1(t),\quad f_2(t),\quad \ldots,\quad f_n(t),\quad \ldots \tag{20}$$

de l'équation (18). Je dis que ces fonctions sont orthogonales et normales.

D'après la manière dont nous les avons choisies, elles sont normales, et celles qui correspondent à des valeurs égales de λ sont orthogonales. Il reste à vérifier que deux fonctions $f_n(t)$ et $f_p(t)$, correspondant à deux valeurs distinctes λ_n et λ_p, sont orthogonales.

On a, par définition de $f_n(t)$,

$$f_n(t) = \lambda_n \int_0^1 \varphi(t, \tau) f_n(\tau)\, d\tau,$$

d'où, en multipliant par $\lambda_p f_p(t)\, dt$ et intégrant de 0 à 1,

$$\lambda_p \int_0^1 f_n(t) f_p(t)\, dt = \lambda_n \lambda_p \int_0^1 \int_0^1 \varphi(t, \tau) f_p(t) f_n(\tau)\, dt\, d\tau.$$

Le deuxième membre ne change pas si l'on intervertit les indices n et p. Il en est donc de même du premier, ce qui donne

$$(\lambda_n - \lambda_p) \int_0^1 f_n(t) f_p(t)\, dt = 0.$$

Le premier facteur n'étant pas nul, le résultat énoncé est établi.

64. On peut établir une théorie des développements des fonctions de carrés sommables de deux variables en séries de fonctions orthogonales, analogue à celle déjà exposée dans le cas d'une variable.

Nous considérerons à cet effet deux suites complètes de fonctions orthogonales et normales

$$(21)\qquad \begin{cases} f_1(t), & f_2(t), & \ldots, & f_n(t), & \ldots, \\ g_1(\tau), & g_2(\tau), & \ldots, & g_n(\tau), & \ldots. \end{cases}$$

Les fonctions $f_p(t)g_q(\tau)$, considérées comme fonctions des deux variables t et τ, sont *orthogonales et normales dans le carré* $0 < t < 1$, $0 < \tau < 1$.

Soit d'abord une fonction $\varphi(t, \tau)$ continue dans ce carré. On peut, pour chaque valeur de τ, la représenter par une série de fonctions $f_n(t)$, les coefficients

$$h_n(\tau) = \int_0^1 f_n(t)\varphi(t, \tau)\,d\tau$$

pouvant eux-mêmes se représenter par une série de fonctions $g_n(\tau)$. On est ainsi conduit à représenter $\varphi(t, \tau)$ par la série

$$(22)\qquad \sum_{p=1}^{p=\infty}\sum_{q=1}^{q=\infty} c_{p,q} f_p(t) g_q(\tau)$$

où

$$(23)\qquad c_{p,q} = \int_0^1\int_0^1 f_p(t) g_q(\tau)\varphi(t, \tau)\,dt\,d\tau.$$

On vérifie d'ailleurs sans peine qu'elle converge en moyenne vers $\varphi(t, \tau)$.

Si la fonction $\varphi(t, \tau)$ n'est pas continue, mais seulement de carré sommable, on peut en approcher en moyenne, autant qu'on veut, par une fonction continue, et par suite, par une somme limitée de la forme (22). Or de toutes les sommes de cette forme, formées avec des systèmes déterminés d'indices p, q, mais des coefficients indéterminés, on vérifie sans peine que celle qui approche en moyenne le plus de $\varphi(t, \tau)$ est celle formée avec les coefficients (23), projections de la fonction $\varphi(t, \tau)$ sur les vecteurs qui représentent $f_p(t)g_q(\tau)$ dans l'espace fonctionnel à 2ω dimensions qui représente les fonctions de carrés sommables de deux variables. Il est donc certain que la série (22), p et q prenant toutes les valeurs entières, converge en moyenne vers $\varphi(t, \tau)$.

Inversement, si les coefficients $c_{p,q}$ sont donnés, et tels que $\Sigma^2_{p,q}$ soit finie, on vérifie sans peine que la série (22) représente une

fonction $\varphi(t, \tau)$ de carré sommable, et que

$$(24) \qquad \int_0^1 \int_0^1 \varphi^2(t, \tau)\, dt\, d\tau = \Sigma c_{p,q}^2.$$

65. Appliquons ces résultats au cas où l'on prend pour fonction $\varphi(t, \tau)$ la fonction symétrique, noyau de l'équation (18) et pour suite des $f_p(t)$ et pour suite des $g_p(\tau)$ la suite (20), supposée complète. Il vient

$$c_{p,q} = \int_0^1 f_p(t)\, dt \int_0^1 f_q(\tau)\varphi(t, \tau)\, d\tau = \frac{1}{\lambda_q}\int_0^1 f_p(t) f_q(t)\, dt,$$

c'est-à-dire 0, si p et q sont différents, et $\frac{1}{\lambda_p}$, s'ils sont égaux. On a alors

$$(25) \qquad \varphi(t, \tau) = \frac{f_1(t) f_1(\tau)}{\lambda_1} + \ldots + \frac{f_n(t) f_n(\tau)}{\lambda_n} + \ldots,$$

cette série étant, sinon convergente, du moins convergente en moyenne, dans le carré $0 < t < 1$, $0 < \tau < 1$, et

$$(26) \qquad \int_0^1 \int_0^1 \varphi^2(t, \tau)\, dt\, d\tau = \frac{1}{\lambda_1^2} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n^2} + \ldots,$$

formule qui montre que les λ_n, racines du déterminant de l'équation (18), ne sont pas des nombres quelconques, mais doivent croître assez vite pour que cette série converge.

En portant cette expression dans la valeur de la fonctionnelle U, on trouve

$$(27) \qquad U = \frac{a_1^2}{\lambda_1} + \ldots + \frac{a_n^2}{\lambda_n} + \ldots,$$

série qui est bien convergente, puisque Σa_n^2 est fini et que les a_n augmentent indéfiniment.

66. Il peut arriver que la suite (20) ne soit pas complète. Les séries $\Sigma c_{p,q} f_p(t) f_q(\tau)$ ne représentent pas dans ce cas toutes les fonctions de carrés sommables. Le résultat fondamental de M. Schmidt consiste en ce qu'elles peuvent certainement représenter le noyau $\varphi(t, \tau)$ dont la suite (20) est déduite. Alors les formules (25), (26) et (27) restent valables, la série de la première formule étant convergente en moyenne, et les autres étant convergentes.

Pour montrer la possibilité, soit de ce cas, soit du précédent où la suite (20) est complète, il suffit de se donner *a priori* cette suite, finie ou infinie, et dans ce dernier cas complète ou incomplète, puis les λ_n tels que la série (26) converge. La série (25) définit alors la fonction de carré sommable $\varphi(t, \tau)$, et il est bien évident que l'équation (18), pour $\lambda = \lambda_n$, admet la solution $f_n(t)$, de sorte qu'en partant de cette équation, on retrouve la suite des fonctions $f_n(t)$ choisies.

67. Comme conclusion de ce qui précède, nous voyons que la fonctionnelle (17) est toujours décomposable en un nombre fini ou une infinité dénombrable de carrés orthogonaux. En d'autres termes, on peut rapporter la quadrique $U = \text{const.}$ à ses axes, comme nous nous étions proposés de le faire.

Si la suite (20) n'est pas complète, le système des coordonnées a_1, a_2, ..., a_n, ... peut être complété par d'autres coordonnées b_1, b_2, ... Ces dernières n'intervenant pas dans l'expression (27), la quadrique $U = \text{const.}$ est du type parabolique; d'une manière plus précise, c'est un cylindre, ayant ses plans générateurs parallèles au plan

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \ldots = 0.$$

Si la suite (20) est complète, la quadrique $U = 1$ est du type ellipsoïde ou du type hyperboloïde suivant que les λ_n sont ou non tous du même signe.

Dans un cas comme dans l'autre, les demi-axes ont la valeur $l_n = \sqrt{\lambda_n}$. On remarque qu'ils deviennent infinis, la série $\sum \frac{1}{l_n^4}$ étant convergente.

68. **Forme normale quelconque.** — Des circonstances toutes différentes se présentent si U n'est pas une fonctionnelle de Gateaux. Supposons-la de la forme

$$U = \int_0^1 \psi(t)\, x^2(t)\, dt. \tag{28}$$

La condition $\delta(\lambda U - r^2) = 0$ s'écrit

$$x(t)\,[\lambda\,\psi(t) - 1] = 0.$$

Pour aucune valeur de λ, elle n'est vérifiée pour une fonction non identiquement nulle, du moins en général. Pour expliquer cette circons-

tance, appliquons la méthode du passage du fini à l'infini. Remplaçons d'abord $\psi(t)$ par une fonction simple d'ordre n égale successivement à $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$. Dans l'intervalle $\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$, le facteur $\lambda\psi(t) - 1$ s'annule si l'on prend $\lambda = \frac{1}{\psi_i}$, et la condition précédente est vérifiée si $x(t)$ est nul en dehors de cet intervalle. Si nous nous bornons aussi pour $x(t)$ aux fonctions simples d'ordre n, nous n'avons qu'à prendre comme valeur de $x(t)$ correspondant à la valeur $\lambda_i = \frac{1}{\psi_i}$, la fonction $x_i(t)$ égale à $\sqrt{n}$ dans l'intervalle $\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$ et nulle en dehors de cet intervalle, et nous avons la formule de décomposition en carrés

$$U = \sum \frac{\xi_i^2}{n\lambda_i} = \sum \frac{a_i^2}{\lambda_i},$$

en posant $x(t) = \Sigma a_i x_i(t)$, c'est-à-dire que $\xi_i = \sqrt{n} a_i$ est la valeur de $x(t)$ dans l'intervalle $\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$.

Quand n augmente indéfiniment, l'ensemble des valeurs caractéristiques de λ tend vers l'ensemble de toutes les valeurs de $\frac{1}{\psi(t)}$; on dit qu'il forme un *spectre continu*, tandis que, dans le cas précédent, on avait un *spectre discontinu*. La somme des carrés tend alors non vers une série, comme dans l'exemple précédent, mais vers une intégrale, qui n'est autre que l'intégrale (28). Chacune des fonctions $x_i(t)$ ne converge pas en moyenne vers une fonction de carré sommable, puisque son module fonctionnel restant égal à 1, elle tend vers zéro, sauf en un point de l'intervalle (0, 1); ceci explique que nous n'ayons pas pu trouver de fonction de carré sommable correspondant à chacune des valeurs caractéristiques $\lambda = \frac{1}{\psi(\tau)}$ et annulant $\delta(\lambda U - r^2)$.

C'est d'ailleurs cette circonstance qui caractérise le cas du spectre continu, et non le fait que les longueurs des demi-axes des $n^{\text{ièmes}}$ sections aient pour valeurs limites toutes les valeurs d'un certain intervalle. Cette dernière circonstance est réalisée aussi par exemple pour la quadrique

$$c_1 a_1^2 + c_2 a_2^2 + \ldots + c_n a_n^2 + \ldots = 1,$$

les c_n étant finis et partout denses dans un certain intervalle; mais en

direction, les demi-axes de la quadrique tendent vers des droites limites déterminées, situées dans l'espace fonctionnel, c'est-à-dire représentant des fonctions de carrés sommables; c'est ce qui caractérise le cas du spectre discontinu.

Si la fonction $\psi(t)$ garde un signe constant sans s'annuler, la forme U sera définie, la quadrique $U = \text{const.}$ étant du type ellipsoïde. Si $\psi(t)$ s'annule dans une partie de l'intervalle $(0, 1)$, la quadrique $U = \text{const.}$ sera un cylindre, elliptique ou hyperbolique suivant que les valeurs non nulles de $\psi(t)$ sont toutes de même signe ou non. Si $\psi(t)$ change de signe, en ne s'annulant que pour les points d'un ensemble de mesure nulle, ce qui est indifférent pour la fonctionnelle U, la quadrique est du type hyperbolique.

De toute façon, les *demi-axes* de la quadrique $U = 1$ prennent toutes les valeurs de la fonction $\frac{1}{\sqrt{\psi(t)}}$.

69. On obtient naturellement des circonstances plus générales pour la forme

$$(29) \qquad U = \int_0^1 \int_0^1 \varphi(t, \tau)\, x(t)\, x(\tau)\, dt\, d\tau + \int_0^1 \psi(t)\, x^2(t)\, dt$$

qui comprend les deux précédentes comme cas particulier. La condition $\delta(\lambda U - r^2) = 0$ s'écrit

$$x(t)\,[1 - \lambda\,\psi(t)] = \lambda \int_0^1 \varphi(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau.$$

Tant que $|\lambda| < \frac{1}{\mathfrak{M}}$, $\mathfrak{M}$ désignant le module maximum de $\psi(t)$, on peut diviser par $1 - \lambda\psi(t)$, ce qui ramène l'équation à la forme de Fredholm, et la solution est donnée par les formules habituelles; on ne peut avoir qu'un spectre discontinu. Mais le spectre peut devenir continu dès que $|\lambda|$ dépasse la valeur $\frac{1}{\mathfrak{M}}$.

70. **Forme générale.** — Des circonstances différentes encore se produiront pour les formes qui ne sont pas normales. Soit, par exemple, la fonctionnelle déjà considérée

$$(30) \qquad U = \int_0^1 x(t)\, x(1 - t)\, dt.$$

La condition $\delta(\lambda U - r^2) = 0$ s'écrit

$$\lambda x(1-t) = x(t).$$

Pour que cette formule soit vraie à la fois pour t et $1-t$, il faut que $\lambda = \pm 1$. Pour la valeur caractéristique 1, les fonctions $x(t)$ correspondantes doivent être telles que $x(t) = x(1-t)$, c'est-à-dire *paire*, si on la prolonge pour t négatif de manière qu'elle admette la période 1. Pour $\lambda = -1$, les fonctions correspondantes seront *impaires*. On a ainsi deux valeurs caractéristiques d'ordres infinis, et en développant les fonctions paires en série de fonctions orthogonales et normales

$$f_2(t), \quad f_4(t), \quad \ldots \quad f_{2p}(t), \quad \ldots,$$

et de même les fonctions impaires en une série analogue de fonctions

$$f_1(t), \quad f_3(t), \quad \ldots, \quad f_{2p-1}(t), \quad \ldots,$$

on arrive à la formule

$$U = \int_0^1 \left[\frac{x(t)+x(1-t)}{2}\right]^2 dt - \int_0^1 \left[\frac{x(t)-x(1-t)}{2}\right]^2 dt = \Sigma(-1)^n a_n^2.$$

On voit que nous obtenons une décomposition en une infinité dénombrable de carrés, mais dans laquelle les coefficients alternativement égaux à -1 et à $+1$, ne tendent pas vers une limite. Cette circonstance ne semble pas pouvoir se produire avec une fonctionnelle normale; en tout cas, elle ne le peut pas, comme nous l'avons déjà remarqué, si la suite des fonctions $f_n(t)$ correspondant aux axes est la suite (6) du Chapitre précédent.

Elle se produira au contraire, en général, avec une fonctionnelle générale donnant lieu à un spectre discontinu, puisqu'une telle fonctionnelle peut être obtenue en choisissant arbitrairement les directions des axes, et une suite de nombres $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$, dont les modules soient bornés, et en posant

$$U = c_1 a_1^2 + c_2 a_2^2 + \ldots + c_n a_n^2 + \ldots.$$

71. Le volume de l'ellipsoïde. — Proposons-nous d'évaluer le volume de l'ellipsoïde dans les différents cas que nous venons de considérer. Soit d'abord l'ellipsoïde $\mathcal{E}$, d'équation

$$(31) \qquad U = \frac{a_1^2}{\lambda_1} + \frac{a_2^2}{\lambda_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{\lambda_n} + \ldots = 1,$$

le système des axes des $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ étant supposé complet, et les λ_n étant des nombres positifs, augmentant indéfiniment que nous supposerons rangés par ordre de grandeurs croissantes $\left(\text{si } \sum \frac{1}{\lambda_n^2}\right.$ converge, U est une fonctionnelle normale de Gateaux$\left.\right)$.

La section de cet ellipsoïde par le plan des $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est un ellipsoïde, équivalent à une sphère du même plan, dont le rayon, moyenne géométrique des demi-axes $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}$ augmente indéfiniment avec n. A la limite, le volume de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ apparaît comme supérieur à celui de n'importe quelle sphère.

Au lieu de la section de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ par le plan des $a_1, a_2, \ldots, a_n$, on peut considérer sa $n^{\text{ième}}$ section $\mathcal{E}_n$, soit au point de vue du n° 48, soit au point de vue du Chapitre III, les axes étant seulement différents de ceux de l'ellipsoïde. Nous allons montrer que les demi-axes de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_n$, rangés par ordre de grandeurs croissantes, tendent respectivement vers $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots$, de sorte que la conclusion relative au volume de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ reste exacte à ce nouveau point de vue.

Pour simplifier le raisonnement, nous supposerons les λ_n tous distincts; il n'y aurait aucun changement essentiel si l'on en supposait plusieurs égaux.

Pour n assez grand, le plan de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_n$ approche autant qu'on veut de tout point de l'espace fonctionnel, et en particulier des extrémités de l'axe des a_1 dans l'ellipsoïde $\mathcal{E}$. Par suite, $\mathcal{E}_n$ contient des points dont la distance au centre, évidemment toujours supérieure à $\sqrt{\lambda_1}$, approche autant qu'on veut de cette valeur. Donc le plus petit demi-axe de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_n$ tend en grandeur vers $\sqrt{\lambda_1}$ et par suite en position vers l'axe des a_1.

Dans la section de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_n$ par le plan perpendiculaire à cet axe, plan qui tend vers le plan $a_1 = 0$, la distance au centre devient et reste supérieure, pour n assez grand, à $\sqrt{\lambda_2} - \varepsilon$, ε étant un nombre positif arbitrairement petit. Les deux points de cette section les plus rapprochés du centre tendent alors vers les extrémités de l'axe des a_2 dans l'ellipsoïde $\mathcal{E}$. Le second des demi-axes de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_n$, rangés par ordre de grandeurs croissantes, tend donc vers $\sqrt{\lambda_2}$; et ainsi de suite. C. Q. F. D.

72. Plaçons-nous maintenant dans le cas de l'ellipsoïde

$$32) \qquad U = A_1 a_1^2 + A_2 a_2^2 + \ldots + A_n a_n^2 + \ldots = 1,$$

les A_n, tous positifs, ayant une limite finie et non nulle $\frac{1}{L^2}$. Les longueurs des demi-axes tendent vers L, et peuvent être tantôt inférieures, tantôt supérieures à cette valeur. On peut appliquer le principe du raisonnement précédent, en cherchant séparément les plus grands et les plus petits demi-axes de la $n^{\text{ième}}$ section. On trouve ainsi que les demi-axes de cette section tendent respectivement vers $\frac{1}{\sqrt{A_1}}, \frac{1}{\sqrt{A_2}}, \ldots$, le nombre de ceux qui ne sont pas compris entre $L - \varepsilon$ et $L + \varepsilon$ restant fini, quelque petit que soit ε. Le rayon de la sphère équivalente tend alors vers L.

On peut même obtenir un résultat plus précis, dans le cas où le produit

$$L\sqrt{A_1}.L\sqrt{A_2}\ldots L\sqrt{A_n}$$

a une limite déterminée, finie, infinie ou nulle, mais indépendante de l'ordre des facteurs, c'est-à-dire quand la série $\Sigma\left(A_n - \frac{1}{L^2}\right)$ n'est pas semi-convergente. Ce produit représente le rapport du volume de la sphère de rayon L dans l'espace E_n à celui de la section de l'ellipsoïde (32) par le plan des $a_1\ a_2 \ldots\ a_n$. Si au lieu de cette section on considère la $n^{\text{ième}}$ section de l'ellipsoïde dans un système quelconque, on démontre que le rapport du volume de la sphère de rayon L dans l'espace E_n à celui de cette $n^{\text{ième}}$ section a la même limite, finie, infinie, ou nulle. Ce résultat donne une idée plus précise du volume de l'ellipsoïde (32) que ne le fait la connaissance du rayon L de la sphère équivalente.

73. Dans les cas que nous venons de considérer, les demi-axes ont une limite, finie ou infinie. Si par exemple cette limite est finie et égale à L, on peut, ε étant arbitrairement petit, couper la surface par un plan diamétral à $\omega - p$ dimensions (p étant fini), de manière que tous les points de la section soient à une distance du centre comprise entre $L - \varepsilon$ et $L + \varepsilon$. Cette section est presque une sphère, et le fait que dans les directions conjuguées, en nombre fini, les demi-diamètres soient différents de L, ne change pas l'ordre de grandeur du volume. Ces circonstances ne sont possibles que dans le cas du spectre discontinu. Il reste à étudier le cas où, le spectre étant discontinu, les demi-axes n'ont pas de limite, et le cas du spectre continu ou mixte.

Dans ces cas, les demi-axes n'ayant pas presque tous la même valeur, leur ordre n'est pas indifférent, et le choix de la $n^{\text{ième}}$ section que l'on considère ne l'est pas non plus. Il faut alors se placer au point de vue indiqué n° 48, lié au point de vue de Gateaux. Comme il est souvent plus commode de se placer au point de vue du Chapitre III, il est intéressant de se demander dans quel cas ces points de vue sont équivalents. Il est probable que, comme c'était le cas dans l'étude de la moyenne, il y a équivalence des deux points de vue, soit pour une fonctionnelle U normale et une suite également dense, soit pour une fonctionnelle générale et une suite normalement dense. Nous ne l'avons pas démontré rigoureusement.

74. Nous allons montrer dans un cas particulier qu'il en est bien ainsi. Considérons l'ellipsoïde $U = 1$, U désignant la fonctionnelle

$$(33)\quad U = \int_0^1 [x^2(t) + x(t)\,x(1-t) + x^2(1-t)]\,dt$$
$$= 3\int_0^1 \left[\frac{x(t)+x(1-t)}{2}\right]^2 dt + \int_0^1 \left[\frac{x(t)-x(1-t)}{2}\right]^2 dt.$$

Pour définir ce volume, nous devons considérer sa $(n-1)^{\text{ième}}$ section réduite, en nous plaçant dans le champ des fonctions simples d'ordre $n-1$, ayant une valeur constante $x_i\sqrt{n-1}$ dans chacun des intervalles $\left(\frac{i-1}{n-1}, \frac{i}{n-1}\right)$. En groupant les termes d'indices i et $n-i$, U apparaît comme somme de termes de la forme

$$2x_i^2 + 2x_i x_{n-i} + 2x_{n-i}^2 = 3\left(\frac{x_i + x_{n-i}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x_i - x_{n-i}}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Le terme d'indice $\frac{n}{2}$ pouvant évidemment être négligé, si n est pair et suffisamment grand, les demi-axes sont égaux, la moitié à 1, l'autre moitié à $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Leur moyenne géométrique, ou rayon de la sphère équivalente, tend donc vers $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$, tandis que la valeur moyenne de U sur la sphère de rayon 1 est égale à 2.

Prenons maintenant un système de coordonnées orthogonales, définies par des fonctions $f_n(t)$ de période 1, et qui soient toutes paires ou impaires. Désignons par a_n les coordonnées correspondant

aux fonctions paires et b_n celles qui correspondent aux fonctions impaires. La fonctionnelle U prend la forme

$$U = 3\Sigma a_n^2 + \Sigma b_n^2.$$

Pour que les demi-axes aient bien pour moyenne géométrique $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$, il faut et il suffit que les fonctions $f_n(t)$ soient rangées dans un ordre tel que les n premières fonctions comprennent un nombre de fonctions paires équivalent pour n infini à $\frac{n}{2}$. C'est précisément la condition pour que la moyenne des coefficients soit $\frac{3+1}{2} = 2$, c'est-à-dire pour que la valeur moyenne de U sur la sphère $r^2 = 1$ soit bien 2.

Par généralisation, il est naturel de penser que les conditions pour que la moyenne géométrique des demi-axes soit la même aux deux points de vue, sont les mêmes que les conditions pour que la moyenne de U sur la sphère de rayon 1 soit la même aux deux points de vue; ces conditions seraient donc que la suite des fonctions $f_n(t)$ soit normalement dense, ou du moins n'admette comme ligne exceptionnelle aucune ligne qui le soit aussi pour la fonctionnelle U.

75. Considérons maintenant le cas où U est de la forme

$$U = \int_0^1 \psi(t)\, x^2(t)\, dt, \tag{34}$$

la fonction $\psi(t)$ étant positive ou exceptionnellement nulle. Sa $n^{ième}$ section réduite est la fonction

$$u_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi_1 x_1^2 + \psi_2 x_2^2 + \ldots + \psi_n x_n^2,$$

où ψ_i désigne la moyenne de $\psi(t)$ dans l'intervalle $\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$. L'ellipsoïde $u_n = 1$ est donc équivalent à une sphère de l'espace E_n de rayon L_n défini par la formule

$$\frac{1}{L_n^2} = \sqrt[n]{\psi_1 \psi_2 \ldots \psi_n},$$

de sorte qu'à la limite, le rayon de la sphère de l'espace fonctionnel équivalente à l'ellipsoïde $U = 1$ est la moyenne géométrique des valeurs de $\frac{1}{\sqrt{\psi(t)}}$, c'est-à-dire le nombre positif L défini par la

formule

$$\log \frac{1}{L^2} = \int_0^1 \log \psi(t)\, dt.$$

Ce rayon est évidemment infini si la fonction $\psi(t)$ est nulle pour les points d'un ensemble de mesure positive. Mais il reste fini si $\psi(t)$ est une fonction continue ayant en un point une racine d'ordre entier.

Il est facile de passer de ce cas au cas plus général où U est une fonctionnelle normale du second degré,

$$(35) \qquad U = \int_0^1 \psi(t)\, x^2(t)\, dt + \int_0^1 \int_0^1 \varphi(t, \tau)\, x(t)\, x(\tau)\, dt\, d\tau.$$

La présence de l'intégrale double, qui peut évidemment changer le signe de U pour certaines fonctions $x(t)$ et par suite la nature de la quadrique $U = 1$, ne peut pas changer le rayon de la sphère équivalente, si cette quadrique reste un ellipsoïde. Cela tient à ce que cette intégrale est du type (31) et par suite, quelque petit que soit ε, inférieure à εr^2 dans un plan à $\omega - p$ dimensions, p étant fini. Les p dimensions ainsi négligées sont sans importance (sauf dans le cas où le carré d'un des demi-diamètres correspondants devient infini ou change de signe; mais dans ce cas la quadrique $U = 1$ cesse d'être un ellipsoïde). Pour les directions du plan à $\omega - p$ dimensions considéré, l'intégrale double est négligeable devant l'intégrale simple, à moins que celle-ci ne soit elle-même très petite par rapport à r^2; mais les directions pour lesquelles il en est ainsi, ou bien peuvent être négligées, ou bien ne le peuvent pas, et dans ce dernier cas le rayon de la sphère équivalente à l'ellipsoïde est infini, et le reste après addition de l'intégrale double. (Il n'y a d'ailleurs aucune difficulté à préciser ce raisonnement et le rendre parfaitement rigoureux.)

76. Plaçons-nous dans le cas où la quadrique $U = 1$ est un ellipsoïde, et considérons les trois quantités suivantes :

1° Le rayon L de la sphère équivalente;

2° La valeur moyenne de $\frac{U}{r^2}$ sur la sphère $r^2 = 1$ (ou à son intérieur, ce qui revient au même); nous la désignerons par $\frac{1}{l^2}$; l est alors le rayon de la sphère sur laquelle U est en moyenne et, par suite, presque partout, égal à 1.

3° La valeur moyenne de $\frac{U}{r^2}$ à l'intérieur de l'ellipsoïde $U = 1$; nous la désignerons par $\frac{1}{l'^2}$. (Il résultera de la suite que c'est aussi la valeur moyenne du même rapport sur la surface de l'ellipsoïde.)

Il existe une relation d'inégalité entre l, l' et L. Pour l'établir, considérons d'abord la $n^{ième}$ section de l'ellipsoïde. Son équation, rapportée à des axes convenables, est de la forme

$$A_1 a_1^2 + A_2 a_2^2 + \ldots + A_n a_n^2 = 1.$$

Les quantités l_n, l'_n et L_n, analogues à l^2, l'^2 et L^2, mais relatives à cette $n^{ième}$ section, sont les moyennes harmonique, arithmétique et géométrique des carrés des quantités $\lambda_i = \frac{1}{A_i}$, carrés des demi-axes. On a donc

$$l_n \leqq L_n \leqq l'_n.$$

Elles tendent respectivement vers l, L, l'. On a donc

$$l \leqq L \leqq l'. \tag{36}$$

Ce résultat est facile à interpréter géométriquement. Si, en chaque point M de la sphère $r^2 = 1$, on désigne par λ la longueur du demi-diamètre de l'ellipsoïde qui passe par ce point (en d'autres termes, si l'on désigne par $\frac{1}{\lambda^2}$ la valeur de U en ce point), λ est sur presque toute la sphère égal à l. Mais, si l'on passe de la sphère à l'ellipsoïde en faisant se correspondre les éléments situés sur un même rayon, les éléments pour lesquels $\lambda > l$ sont « tellement grossis », qu'ils peuvent constituer, après cette opération, presque tout le volume de l'ellipsoïde, bien que ne constituant auparavant qu'une fraction négligeable de la sphère. Le volume de l'ellipsoïde peut être ainsi le même que si λ avait une valeur constante $L > l$.

On s'explique de même, en intervertissant les rôles de la sphère et de l'ellipsoïde, que l'on ait $L \leqq l'$. Rappelons qu'au n° **23** nous avons déjà établi et expliqué géométriquement l'inégalité $l \leqq l'$ sans faire intervenir L.

Il est intéressant de se demander dans quels cas on a l'égalité

$$l = L = l'. \tag{37}$$

Il est évidemment nécessaire et suffisant pour cela que, dans le calcul

des moyennes (harmonique, géométrique, ou arithmétique) des carrés des demi-axes, ceux de ces demi-axes qui ne sont pas compris dans l'intervalle $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ aient, quelque petit que soit ε, une influence négligeable. Cela n'est pas possible dans le cas du spectre continu, tout intervalle fini contenant des valeurs des demi-axes ayant un poids fini. Cela sera réalisé dans le cas du spectre discontinu, si les demi-axes ont une limite. Mais cela peut être réalisé sans qu'il y ait une limite.

Supposons en effet les fonctions $f_n(t)$ rangées dans un ordre normal. Si l'on choisit une suite d'indices $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$, tels que le rapport $\frac{n_p}{p}$ devienne infini, c'est-à-dire tels que leur densité moyenne $\frac{p}{n_p}$ tende vers o, les demi-axes correspondants n'ont aucune influence sur le calcul de la moyenne; ils peuvent ne pas tendre vers la même limite que les autres sans que l'égalité (37) cesse d'être vraie. La condition nécessaire et suffisante pour que cette égalité soit vraie est donc que, si petit que soit ε, la suite des indices n_p correspondant à des demi-axes non compris entre $L - \varepsilon$ et $L + \varepsilon$, soit finie, ou telle que sa densité moyenne $\frac{p}{n_p}$ tende vers o. Nous dirons que, dans ce cas, les demi-axes de l'ellipsoïde *tendent presque tous vers la limite* L [1].

Bien entendu, il résulte de ce raisonnement que l'une des égalités $l = L$ et $L = l'$ ne peut être vérifiée sans que l'autre le soit.

77. Les sections planes de l'ellipsoïde. — Nous avons déjà observé que la géométrie de l'espace fonctionnel, et celles des plans à $\omega - 1$ ou à $\omega - p$ dimensions, sont identiques, du moins en ce qui concerne les propriétés liées aux notions d'angle et de distance. Telles sont celles qui concernent les axes d'une quadrique, à l'extrémité desquels le plan tangent est perpendiculaire au rayon. Aussi rencontre-t-on dans l'étude des axes d'une section plane les mêmes cas que dans

---

[1] Dans la suite, nous emploierons l'expression *presque tous*, en parlant d'éléments liés aux fonctions d'une suite orthogonale, lorsque, *ces fonctions étant rangées dans un ordre normal*, la proportion $\frac{p}{n_p}$ des indices négligés tend vers o. Qu'il s'agisse de tels éléments, ou d'éléments dépendant d'une fonction arbitraire, les mots *presque tous*, qui reviennent souvent dans cette étude, signifient donc toujours « *en négligeant des éléments sans influence sur la valeur de la moyenne* ».

l'étude de ceux de la quadrique : spectre continu ou discontinu ; longueurs des axes ayant une limite ou n'en ayant pas ; dans le cas de l'ellipsoïde inégalité (36) ou égalité (37).

Il reste à étudier les relations entre les propriétés de la quadrique et celles de la section plane. La circonstance essentielle que cette étude mettra en évidence est que ces propriétés sont les mêmes ; en ce qui concerne les différents cas que nous venons de distinguer, une quadrique et toutes ses sections planes se rattachent au même cas ; les valeurs des moyennes l, L, l' sont les mêmes pour un ellipsoïde et toutes ses sections planes. Il ne peut y avoir d'exception que pour les propriétés pouvant être modifiées par un changement ne portant que sur un axe, comme c'est le cas pour la nature des quadriques au point de vue de la réalité des directions asymptotiques.

Il suffit d'ailleurs d'étudier la relation entre une quadrique et sa section par un plan à $\omega - 1$ dimensions. Dans ce plan, on étudie de même la relation entre la section complète et sa section par un plan n'ayant plus que $\omega - 2$ dimensions, et ainsi de suite. Les résultats ainsi établis en ce qui concerne les plans à $\omega - 1$ dimensions s'étendent donc aux plans à $\omega - p$ dimensions, p étant fini. Bien entendu, il ne peut être question d'aller beaucoup plus loin [1] ; ainsi les propriétés des sections par des plans à un nombre fini de dimensions sont toutes différentes, et les longueurs de leurs axes sont sans influence sur le calcul des valeurs moyennes l, L, l'.

78. Commençons par indiquer comment les calculs se présentent en pratique. Soit à étudier la section de la quadrique $U = 1$ par le plan $V = 0$, les fonctionnelles U et V étant homogènes, de degrés respectifs 2 et 1. A l'extrémité d'un axe, les plans tangents à la quadrique et à la sphère $r^2 = \text{const.}$, passant par ce point, ne seront pas

---

[1] Nous disons à dessein *beaucoup* plus loin ; on peut, dans certains cas, aller *un peu* plus loin. Si les axes sont rangés dans un ordre tel que la suite des fonctions correspondantes soit normalement dense, et si l'on considère ceux d'indices $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$, le rapport $\frac{n_p}{p}$ devenant infini avec p, l'ensemble de ces axes est analogue par certaines propriétés à l'ensemble d'un nombre fini d'axes ; il n'influe pas sur le calcul des moyennes, comme nous l'avons vu au n° 75. Le plan formé par tous les autres axes est, par contre, analogue à un plan à $\omega - p$ dimensions, p étant fini ; on peut, en employant le même langage qu'au n° 75, dire qu'il contient *presque tous les axes*.

nécessairement confondus; mais leurs intersections avec le plan sécant sont confondues. On a alors

$$\delta(U + \gamma V - \beta r^2) = 0, \tag{38}$$

β et γ désignant des constantes convenables. Cette condition caractérise les points des axes, et les longueurs des demi-axes sont les valeurs de $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$.

Plaçons-nous dans le cas du spectre discontinu. La fonctionnelle U peut alors se mettre sous la forme

$$u = \Sigma \alpha_n a_n^2,$$

les α_n étant finis, puisque U est continu, et le système des axes des $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ étant supposé complet, ce qui est toujours possible en écrivant autant de termes nuls qu'il est nécessaire. La fonctionnelle V étant alors de la forme $\Sigma\, c_n\, a_n$ (les c_n étant tels que la série Σc_n^2 soit convergente), la condition (38) donne, pour toutes les valeurs de n,

$$2\alpha_n a_n + \gamma c_n - 2\beta a_n = 0.$$

Tirant a_n de cette formule, et portant la valeur obtenue dans la condition $V = 0$, on a l'équation

$$\sum \frac{c_n^2}{\beta - \alpha_n} = 0, \tag{39}$$

qui détermine les valeurs de β, inverses des carrés des demi-axes.

Si, par exemple, les α_n sont des nombres positifs décroissant constamment, il résulte immédiatement de la variation du premier membre de l'expression (39) qu'entre deux α_n consécutifs existe une racine de l'équation (39) et une seule. Cela donne une relation très nette entre les longueurs des demi-axes de l'ellipsoïde considéré et de ceux de sa section plane.

Dans des cas plus généraux, la conclusion est moins simple. Si les valeurs des α_n sont denses dans un certain intervalle, le premier membre de l'équation (39) est une fonction analytique d'un type considéré par M. Borel dans ses *Leçons sur la théorie des fonctions*, qui admet tous les points de cet intervalle comme points singuliers; la discussion de l'équation (39) ne peut plus se faire d'une manière aussi élémentaire.

Pour pouvoir conclure dans tous les cas, même dans le cas du spectre continu où l'application directe de la formule (39) est impossible, nous emploierons la méthode du passage du fini à l'infini, en considérant la $n^{\text{ième}}$ section de la figure constituée par l'ellipsoïde et sa section plane, et faisant augmenter n indéfiniment.

Dans l'espace à n dimensions, les n quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant supposées distinctes et rangées par ordre de grandeurs croissantes, les $n-1$ racines de l'équation (39) sont respectivement situées dans les intervalles (α_1, α_2), $(\alpha_2, \alpha_3), \ldots, (\alpha_{n-1}, \alpha_n)$. Si plusieurs des α sont égaux, si par exemple $\alpha_{h+1} = \alpha_{h+2} = \ldots = \alpha_{h+k}$, il est évident géométriquement que cette valeur correspond à $k-1$ axes égaux de la section plane [bien qu'elle ne vérifie pas l'équation (39); cela tient à ce que dans ce cas le facteur γ, que nous avons laissé de côté en écrivant cette équation, est nul]. On peut donc toujours dire qu'entre deux valeurs consécutives des α_n, égales ou non, est située une valeur et une seule de β correspondant à un demi-axe de la section plane.

A la limite, n augmentant indéfiniment, l'ensemble des valeurs limites des α_i constitue le spectre de la quadrique. (Il est indifférent d'appeler spectre l'ensemble des valeurs des α ou des quantités $\lambda = \frac{1}{\alpha}$; nous adopterons dans chaque cas la définition la plus commode; c'est ici la première.) D'une manière précise, si α est un nombre du spectre, et ε un nombre arbitrairement petit, il existe dans l'intervalle $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ au moins un nombre α_i, pour toutes les valeurs de n suffisamment grandes (et non seulement pour une infinité de valeurs croissantes). De même, l'ensemble des valeurs limites des β constitue le spectre de la section plane. La relation obtenue entre les α et les β donne alors immédiatement les résultats suivants :

1° Si α' et α'' sont deux nombres α du spectre de la quadrique, et qu'il n'y ait aucun autre nombre α dans l'intervalle (α', α''), il y a dans cet intervalle un nombre β et un seul, et réciproquement;

2° Si un nombre α' est limite d'une infinité de nombres α, il est aussi limite d'une infinité de nombres β, et réciproquement;

3° Si l'ensemble des nombres α est dense dans un certain intervalle (α', α''), l'ensemble des nombres β est dense dans le même intervalle, et réciproquement;

4° Il n'y a aucun nombre β, ni entre le plus grand des α et $+\infty$, ni entre le plus petit des α (algébriquement) et $-\infty$.

79. La section d'un ellipsoïde est toujours elliptique. Mais la section d'un hyperboloïde peut l'être aussi. Cherchons la condition nécessaire et suffisante pour que la section de la quadrique $U = 1$ par le plan $V = 0$ soit réelle et elliptique.

Le plan $V = 0$ admet le même diamètre conjugué par rapport à toutes les quadriques $U + \lambda V^2 = 1$. On peut toujours déterminer λ, de manière que $U + \lambda V^2$ soit positif sur ce diamètre, et par suite, si la section considérée est elliptique, dans tout l'espace fonctionnel, sauf à l'origine. Il est donc nécessaire, et évidemment suffisant, qu'on puisse déterminer λ de manière que la forme $U + \lambda V^2$ soit définie positive.

80. Nous savons que pour calculer les nombres l et l', qui se ramènent à des moyennes sur une sphère, il suffit de connaître sur un grand cercle les quantités dont on a à chercher la moyenne. Cela revient à dire que l et l' ont la même valeur pour un ellipsoïde et une section plane (dont le plan contienne le centre).

Le même résultat est vrai pour le nombre L, rayon de la sphère équivalente à l'ellipsoïde. Démontrons-le par la méthode du passage du fini à l'infini.

Soient, dans la $n^{\text{ième}}$ section, L_n le rayon de la sphère équivalente à l'ellipsoïde, L'_n la quantité analogue relative à sa section par un plan contenant le centre, h_n la distance à ce plan des plans parallèles tangents à l'ellipsoïde. Ces quantités tendent, pour n infini, vers les quantités L, L', h définies de la même manière dans l'espace fonctionnel. D'ailleurs h est fini (autrement le diamètre conjugué du plan sécant considéré étant infini, la quadrique considérée ne serait pas un ellipsoïde). La formule évidente

$$L_n^n = h_n (L'_n)^{n-1}$$

ou

$$\frac{L_n}{L'_n} = \sqrt[n]{\frac{h_n}{L'_n}}$$

donne à la limite $\frac{L}{L'} = 1$, sauf peut-être dans le cas où L' est infini ; mais, dans ce cas, L l'est aussi, et l'on peut toujours écrire $L = L'$.

On sait d'ailleurs que les valeurs de l, L et l' pour l'ellipsoïde peuvent varier suivant la manière dont on définit la $n^{\text{ième}}$ section. D'après ce qui précède, pour chaque définition, ces quantités auront

les mêmes valeurs pour l'ellipsoïde et pour toutes ses sections planes (par des plans à $\omega - 1$ ou $\omega - p$ dimensions, qui contiennent le centre). Si donc les suites de fonctions normalement denses jouissent bien de cette propriété que nous avons énoncée comme très probable, de conduire au même résultat que le point de vue de Gateaux, non seulement pour l et l', mais aussi pour L, cela est vrai, non seulement pour l'ellipsoïde de l'espace fonctionnel, mais pour toutes ses sections planes.

81. L'indicatrice et la courbure totale d'une surface. — Soit une surface S, passant par l'origine. Nous la représenterons, comme au n° 24, par l'équation

$$U = U_1 + \frac{1}{2} U_2 + \ldots = 0,$$

U_1 et U_2 étant des fonctionnelles homogènes de degrés respectifs 1 et 2, dont nous supposons essentiellement qu'elles ne sont pas identiquement nulles. On peut alors, en multipliant U par un facteur convenable, supposer $\Delta_1 U_1 = 1$. Il suffira de nous placer dans ce cas, les formules générales s'obtenant sans peine en remplaçant U par $\frac{U}{\sqrt{\Delta_1 U_1}}$. La distance d'un point de la surface, voisin de l'origine, au plan tangent $U_1 = 0$, est alors équivalente à $\frac{1}{2} U_2$, et la courbure des sections normales est $\frac{U_2}{r^2}$.

L'*indicatrice* de la surface à l'origine est la section de la quadrique $U_2 = 1$ par le plan $U_1 = 0$. Le rayon de courbure de la section normale est alors égal au carré du rayon de l'indicatrice.

Les résultats obtenus relativement aux sections planes des quadriques s'appliquent à l'indicatrice. On sait donc reconnaître si l'indicatrice est elliptique (ce qui ne suffit pas, d'après ce que nous avons vu aux n°s 63 à 65 de la première Partie, pour que la surface soit, dans le voisinage du point O, tout entière du même côté de son plan tangent). Les axes de l'indicatrice définissent les *directions principales* et les *rayons de courbure principaux*.

On peut de même former, uniquement en connaissant U_2, et sans connaître U_1 (pourvu que $\Delta_1 U_1 = 1$), les nombres l, L et l' relatifs à l'indicatrice. Le nombre $\frac{1}{l^2}$, moyenne de U_2 sur la sphère $r^2 = 1$,

égal à la valeur de ΔU à l'origine, est la courbure moyenne K déjà considérée. Ce sera la moyenne des courbures des sections principales, si ces directions sont rangées dans un ordre normal, ou si les valeurs correspondantes de la courbure ont une limite.

Le nombre $R = L^2$ est ce que nous appellerons le *rayon de courbure totale de la surface;* c'est la moyenne géométrique des rayons de courbure, rangés dans un ordre normal.

82. La notion de courbure totale est liée à celle de représentation sphérique. Bien que ces notions soient susceptibles de généralisation, nous nous placerons dans le cas des surfaces convexes, situées tout entières du même côté de chacun de leur plan tangent.

Soit A un point de la surface S. Soit OM un vecteur de longueur unité, partant de l'origine, et parallèle en direction et sens à la normale en A à la surface, dirigée du côté de la convexité. Le point M est par définition la *représentation sphérique* du point A; quand A se déplace sur la surface S, il décrit, sur la sphère $r^2 = 1$, une figure qui est la représentation sphérique de celle décrite par A.

Lorsque le point A décrit une aire S′, le point M décrit une aire Σ′. Le rapport $\frac{\Sigma'}{S'}$ est par définition la *courbure totale* moyenne de l'aire S′. Sa limite, pour une aire S′ de dimensions très petites voisine d'un point A, est la *courbure totale* de la surface S en A.

Il résulte immédiatement de cette définition que l'intégrale de la courbure totale dans une aire finie S′ est égale à l'aire Σ′ correspondante. En particulier, l'intégrale de la courbure totale sur une surface convexe [1] fermée est égale à la surface de la sphère de rayon 1, soit à ω, avec les unités indiquées n° 51; on peut dire encore qu'elle est égale à l'angle solide total.

Cette courbure totale est liée au rayon de courbure totale R. Remarquons que, dans le voisinage d'un point A, la représentation sphérique peut, sans erreur sur le rayon des sphères d'un plan à $\omega - 1$ dimensions équivalentes aux aires considérées, être assimilée à une transformation linéaire dans le plan tangent.

---

[1] Il est évidemment possible d'étendre cet énoncé au cas de surfaces non convexes; mais il faut définir dans ce but le signe de la courbure totale; cette question paraît assez délicate, surtout si sur certaines parties de la surface il y a une infinité de rayons de courbure principaux de chaque signe.

Plaçons-nous d'abord dans la $n^{\text{ième}}$ section. Les $n-1$ directions principales sont conservées en direction, mais les longueurs correspondantes sont agrandies, si l'on passe de la sphère à la surface S, dans des rapports égaux respectivement aux rayons de courbure correspondants, c'est-à-dire aux carrés des demi-axes de l'indicatrice.

Si l'on désigne par L_n la moyenne géométrique des demi-axes, et $R_n = L_n^2$ celle des rayons de courbe principaux, le rapport des aires correspondantes de la surface et de la sphère est L_n^{n-1}.

Passons à la limite; nous voyons que la courbure totale est $\frac{1}{L^\omega}$, c'est-à-dire que les aires, déformées en général, sont en moyenne agrandies dans le voisinage du point considéré comme si S était une sphère de rayon L.

L'inégalité (36), appliquée à l'indicatrice, donne entre le rayon de courbure totale et la courbure moyenne l'inégalité

$$L \geqq \frac{1}{K}. \tag{40}$$

L'égalité est possible, dans les mêmes cas que l'égalité (37), c'est-à-dire dans le cas où les rayons de courbure principaux tendent presque tous vers une limite.

En particulier, une surface minima convexe a sa courbure totale nulle. Il existe de telles surfaces. Leur équation peut, avec des axes convenables, s'écrire

$$U = \frac{a_1^2}{\lambda_1} + \frac{a_2^2}{\lambda_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{\lambda_n} + \ldots = 1, \tag{41}$$

les λ_n étant positifs, ayant une limite inférieure positive, et devenant presque tous infinis. Tel est le cas en particulier si U est une fonctionnelle de Gateaux, normale, et définie positive.

83. Il peut arriver que le rayon de courbure totale soit indéterminé; lorsqu'un seul des rayons de courbure principaux est infini, cela suffit pour que la moyenne géométrique des n premiers rayons de courbure (les directions principales étant rangées dans un ordre normal) soit infinie. Mais si l'on prend la $n^{\text{ième}}$ section de la surface, au sens de Gateaux, il n'arrivera en général pour aucune valeur qu'elle contienne l'axe infini de l'indicatrice; le plus grand demi-axe de la $n^{\text{ième}}$ section de l'indicatrice augmente indéfiniment, mais en

général pas assez vite pour que la moyenne géométrique de ces demi-axes devienne infinie.

Cette indétermination n'est autre que celle déjà signalée, en note du n° 51, dans le cas du cylindre $r^2 - \alpha^2 = 1$, α désignant la distance à un plan. Si l'on considère son volume comme infini, on est conduit à considérer son rayon de courbure totale comme infini, et sa courbure totale comme nulle. Mais on voit aisément qu'une surface de révolution inscrite dans ce cylindre et ayant avec lui un contact d'ordre 2 a un rayon de courbure totale tendant vers 1 lorsqu'on se rapproche des points de contact; les deux surfaces ayant un contact du second ordre, on est ainsi conduit à dire que le rayon de courbure totale du cylindre est 1. On voit donc que des considérations différentes peuvent conduire à des conclusions différentes, et qu'il faut considérer le rayon de courbure totale comme indéterminé dans les conditions indiquées.

On peut naturellement avoir une détermination d'une autre nature, lorsque, les rayons de courbure principaux étant rangés dans un ordre normal, la moyenne géométrique des n premiers oscille entre deux limites, quand n augmente indéfiniment.

84. A la notion de courbure totale se rattache celle de courbure géodésique totale. Il est sans doute possible de généraliser en utilisant cette notion le théorème de Gauss sur l'intégrale de la courbure géodésique. Nous n'insisterons pas sur cette question.

85. **Propriétés des surfaces parallèles.** — Plaçons-nous d'abord dans l'espace E_n. Soit S une surface parallèle à une surface S_0, et située à une distance h. En deux points correspondants M_0 et M, les directions principales sont parallèles, et les centres de courbure principaux $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sont les mêmes pour les deux surfaces, de sorte qu'on a entre les rayons de courbure correspondants, α_i et ρ_i, la relation

$$\rho_i = \alpha_i - h,$$

d'où l'on déduit, pour la moyenne K_n des courbures principales de S,

$$K_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\alpha_1 - h} + \frac{1}{\alpha_2 - h} + \ldots + \frac{1}{\alpha_n - h}\right)$$

et

$$\frac{dK_n}{dh} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} + \ldots + \frac{1}{\rho_n^2}\right). \tag{42}$$

Or, pour une valeur donnée de K_n, le minimum du second membre est réalisé lorsque tous les ρ_i sont égaux; sa valeur est K_n^2. Dans ce cas toutes les surfaces parallèles ont, aux points M_0 et M, un contact du second ordre avec des sphères concentriques.

Dans tous les autres cas, on a donc

$$\frac{dK_n}{dh} - K_n^2 > 0$$

ou

$$\frac{d}{dh}\left(\frac{1}{K_n} + h\right) < 0, \tag{43}$$

formule qui indique que le centre de courbure C, situé à la distance $\frac{1}{K_n}$ du point M, a un déplacement en sens inverse de celui de M.

On remarque d'ailleurs que, M variant entre deux centres de courbure consécutifs C_i et C_j sur la droite M_0M, la courbure moyenne varie de $-\infty$ à $+\infty$, s'annulant en un point et un seul, que nous pouvons supposer être M_0. Les surfaces obtenues en faisant varier M de C_i à C_j, autres que celle qui contient M_0, ont leur courbure moyenne non nulle au point M, la convexité moyenne étant du côté de M_0. Si alors on considère les éléments dS correspondant à un même élément dS_0 voisin de M_0, ils forment une sorte de *tube* à section variable, limité par des normales aux surfaces S. D'après la formule (1), la section maxima de ce tube correspond à la surface S_0, les sections décroissant des deux côtés, pour s'annuler aux points C_i et C_j.

86. Effectuons le passage du fini à l'infini. La formule (42) donne à la limite

$$\frac{dK}{dh} = \mathfrak{M}\left(\frac{1}{\rho^2}\right), \tag{44}$$

le symbole $\mathfrak{M}$ désignant la moyenne des valeurs de la quantité $\frac{1}{\rho^2}$, toujours au moins égale à K^2.

Plaçons-nous d'abord dans le cas où cette moyenne est supérieure à K^2. Il en est ainsi dans le cas où différentes valeurs de ρ interviennent dans le calcul de la moyenne, c'est-à-dire où presque tous les rayons de courbures principaux ne tendent pas vers une limite,

finie ou infinie; cette circonstance a d'ailleurs lieu en même temps pour toutes les surfaces parallèles. Alors on a

$$\frac{d}{dh}\left(\frac{1}{K}+h\right)<0, \tag{45}$$

ce qui montre que, non seulement K croît avec h, mais que $\frac{1}{K}+h$ décroît, c'est-à-dire que le centre de courbure moyenne C se déplace en sens inverse de M.

Si nous partons d'une surface S régulière en M, il n'y a aucun centre de courbure principal dans le voisinage de ce point; soient C_1 et C_2 les points de la normale en M, les plus voisins de ce point de part et d'autre, et qui soient centres de courbure principaux ou limites de tels centres. Tant que M se déplace entre C_1 et C_2, les surfaces parallèles S sont régulières; au point C_1 et C_2 elles cessent de l'être, les valeurs de la courbure des sections normales n'étant pas finies. Comme il peut arriver qu'un seul des rayons de courbure principaux s'annule, cela ne suffit pas pour que la courbure moyenne devienne infinie, et K croît entre C_1 et C_2, mais non nécessairement de $-\infty$ à $+\infty$. On ne peut donc affirmer que K s'annule entre C_1 et C_2. Mais, d'après la formule (2), si K s'annule, le *tube* lieu des normales à un élément dS a, au point où K s'annule, non seulement une section maxima, mais une section dont l'ordre de grandeur est maximum, c'est-à-dire que le rayon de la sphère équivalente est maximum.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où presque tous les rayons de courbure principaux ont une limite, qui est alors à la fois le rayon de courbure moyenne et le rayon de courbure totale; on a alors $\frac{dK}{dh}=K^2$, d'où résulte que le point C, centre de courbure (moyenne ou totale) reste fixe quand h varie. Les sphères tangentes aux surfaces S et ayant même courbure moyenne qu'elles sont des sphères concentriques. Le tube décrit par l'élément de section dS a ses sections variant comme celles d'un cône de sommet C.

Il peut arriver en particulier que le point C soit à l'infini, c'est-à-dire que les surfaces S aient leur courbure moyenne nulle en M. Nous allons considérer spécialement le cas où il en est ainsi pour tous les points de la surface S, qui est alors minima; on a une famille de surface minima parallèles, et le tube, lieu des portions correspon-

dantes de ces surfaces, a une section, sinon constante, du moins telle que le rayon de la sphère équivalente soit constant.

Dans le cas général, partant d'une surface minima S_0, on obtient des surfaces parallèles tournant leur convexité moyenne vers S_0, et les aires s correspondant à une aire donnée s_0 de S_0 diminuent, lorsqu'on s'éloigne de S_0, de manière que le rayon de la sphère équivalente décroisse. Mais dans le cas où presque tous les rayons de courbure deviennent infinis, les surfaces S parallèles à S_0 sont également minima, et les aires s correspondant à l'aire S_0 varient assez lentement pour que le rayon de la sphère équivalente soit constant. C'est une circonstance qui n'est pas possible dans l'espace E_n, sans que les surfaces S soient des plans.

Cela ne veut même pas dire, d'ailleurs, que toutes les aires s soient du même ordre de grandeur, en ce sens que leurs rapports seraient des nombres finis et que la moyenne d'une fonctionnelle définie dans le tube dépendrait de ses valeurs sur les différentes sections. Il est facile de former une condition suffisante pour qu'il en soit ainsi. Le rapport entre les aires élémentaires correspondantes ds et ds_0 est

$$\prod \frac{\rho_i + h}{\rho_i} = \prod \left(1 + \frac{h}{\rho_i}\right),$$

ce produit étant entendu en supposant les directions principales rangées dans l'ordre normal. Lorsque la série $\sum \frac{1}{\rho_i}$ sera absolument convergente, cette condition sera sûrement réalisée. D'après les relations que nous avons établies entre les axes d'une quadrique et ceux de sa section plane, cela revient à dire, $U = 0$ étant l'équation de la surface S et U_2 la partie homogène du second degré dans le développement de U dans le voisinage d'un point quelconque de S, que la quadrique $U_2 = 1$ peut se mettre sous la forme

$$\frac{a_1^2}{\lambda_1} + \frac{a_2^2}{\lambda_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{\lambda_n} + \ldots = 1,$$

la série $\sum \frac{1}{\lambda_n}$ étant absolument convergente; la série $\sum \frac{1}{\lambda_n^2}$ l'est aussi, *a fortiori*, de sorte que U_2 est une fonctionnelle normale de Gateaux.

87. Remarque. — Nous avons déjà remarqué que, envisagée loca-

lement, une surface minima est *presque un plan*, en ce sens que la courbure des sections normales est presque nulle dans presque toutes les directions. Cela ne veut pas dire que les courbures de presque toutes les directions principales soient nulles ou tendent vers zéro, et, la courbure moyenne, étant la moyenne de ces courbures, sera en général une moyenne au sens habituel du mot, des valeurs différentes ayant un poids fini dans le calcul de la moyenne.

Ce cas étant le cas général, on peut, d'après ce qui précède, distinguer les cas suivants, dans lesquels la surface minima ressemble de plus en plus à un plan, chaque cas étant un cas particulier du précédent :

1° Cas où, en chaque point, presque tous les rayons de courbure deviennent infinis; les surfaces parallèles à la surface considérée sont alors également minima, ce qui n'a pas lieu en général;

2° Cas où tous les rayons de courbure deviennent infinis;

3° Cas où U_2 est une fonctionnelle de Gateaux;

4° Cas où $\sum \frac{1}{\rho_i}$ converge en tous les points, de sorte que les aires correspondantes s et s' de deux surfaces parallèles ont un rapport fini.

88. Propriétés des contours parallèles tracés sur une surface. — Plaçons-nous dans l'espace E_n. Soit un contour C_0, variété d'ordre $n-2$ tracée sur une surface S. En chaque point de la surface, soit h la plus petite distance, comptée sur la surface, au contour C_0. Les contours C, d'équations $h = \text{const.}$, sont les contours *parallèles* au contour C_0 sur la surface S.

Les géodésiques d'ordre 1, ou courbes (lieux de points à 1 paramètre) ayant leurs plans osculateurs normaux à la surface, jouent dans l'étude de ces contours le même rôle que les droites dans l'étude des surfaces parallèles. Soit A_0A une telle géodésique, partant d'un point A_0 de C_0 normalement à ce contour; soient M et M′ ses points d'intersection les plus voisins de A_0, des deux cotés de ce point, avec des géodésiques analogues infiniment voisines. Ils jouent le même rôle que, dans l'étude des surfaces parallèles, les centres de courbure les plus voisins de la surface.

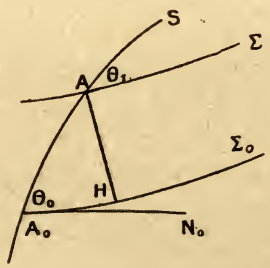
Si l est la distance A_0A comptée sur cet arc, le contour $l = \text{const.}$ peut être appelé aussi *contour parallèle à* C_0. Cette définition se

distingue de la précédente parce que l n'est pas nécessairement la plus petite distance de A au contour C_0. Il faut pour cela que A soit sur l'arc MM', car dans le cas contraire l serait supérieure à la distance de A à C_0 comptée sur une géodésique voisine de A_0A et convenablement choisie; mais l'arc MM' peut ne pas convenir tout entier, car il peut arriver que la distance de A au contour C_0, comptée sur une autre géodésique non infiniment voisine de A_0A, soit inférieure à l. Certaines parties des contours $l =$ const. peuvent donc ne pas convenir à la définition donnée d'abord des contours parallèles. Les contours parallèles $h =$ const., identiques pour les petites valeurs de h aux contours $l =$ const., s'obtiennent, lorsque h augmente, en supprimant des parties de ces contours correspondant à des parties de plus en plus grandes du contour initial. Ils décrivent la surface S une fois et une seule.

Nous allons étudier la variation de la mesure de ces contours successifs. Cette étude est liée à celle de la variation de la courbure géodésique moyenne K_g, par laquelle nous allons commencer.

89. La courbure normale de la surface S étant connue, la courbure moyenne et la courbure géodésique moyenne d'un contour C sont liées à l'angle θ de son plan osculateur avec la surface. Dans l'étude de la variation de θ, lorsqu'on passe de C_0 au contour paral-

Fig 3.



lèle C en décrivant une géodésique normale à C, les éléments du troisième ordre n'interviennent pas, et l'on peut supposer la valeur θ_0 de θ constante sur le contour C_0. La surface minima Σ_0, contenant C_0 et faisant avec S l'angle θ_0, a un contact du second ordre avec la normale principale moyenne A_0N_0.

Soit C le contour parallèle à C_0 à une distance très petite h. On

peut l'assimiler à l'intersection de S avec une surface Σ parallèle à Σ_0 à la distance $h \sin\theta_0$; l'erreur, infiniment petite du second ordre par rapport à h, est sans influence sur la valeur de $\frac{d\theta}{dh}$.

Soit θ_1 l'angle que font en A les surfaces S et Σ. Le plan tangent à Σ, parallèle au plan tangent Σ_0 en un point H voisin de A_0, la direction limite de A_0 H étant $A_0 N_0$, est, avec une erreur infiniment petite du second ordre, parallèle au plan tangent à Σ_0 en A_0. La variation $\theta_1 - \theta_0$ provient donc de ce que le plan tangent à S a tourné, et est équivalente à $-kh$, k désignant la courbure normale de S dans la direction normale à C_0.

D'autre part, la surface Σ tourne sa convexité moyenne vers C_0; la courbure géodésique moyenne de C, comptée positivement du côté des h croissants, est donc plus grande que si Σ était minima, c'est-à-dire que $\theta \leqq \theta_1$. On a donc

$$\theta - \theta_0 \leqq -kh$$

ou

$$\frac{d\theta}{dh} \leqq -k.$$

Si alors la surface S est convexe, et qu'en tout point le rayon de courbure de la section normale soit inférieur ou égal à un nombre fixe R, pour toute valeur positive de h,

$$\theta \leqq \theta_0 - \frac{h}{R},$$

et par suite

$$K_g \geqq \frac{\cot\theta}{R} \geqq \frac{1}{R}\cot\left(\theta_0 - \frac{h}{R}\right). \tag{46}$$

La variation relative de la mesure $\mathfrak{S}$ du contour C est d'ailleurs donnée par la formule

$$\frac{d\log\mathfrak{S}}{dh} = -\frac{n-2}{\mathfrak{S}}\int_C^{(n-2)} K_g\, d\mathfrak{S} = -(n-2)\,\mathfrak{M}(K_g),$$

$\mathfrak{M}$ désignant la moyenne. Donc $\log\mathfrak{S}$ croît moins rapidement, ou décroît plus rapidement, que si K_g était constamment égal à sa limite inférieure $\frac{1}{R}\cot\left(\theta_0 - \frac{h}{R}\right)$, atteinte dans le cas de la sphère de rayon R.

Supposons que pour le contour initial C_0, on ait $K_g = 0$, c'est-à-dire que ce soit une géodésique d'ordre $n-2$, sur la surface considérée. Dans le cas de la sphère de rayon R, cette géodésique est sa section par un plan contenant le centre, et $\mathcal{C}$ décroît jusqu'à o quand h varie de o à $\frac{\pi R}{2}$. Dans le cas d'une autre surface, convexe, et ayant le rayon de courbure des sections normales toujours au plus égal à R, le rapport de $\mathcal{C}$ a sa valeur initiale, décroît au moins aussi rapidement que pour la sphère, et s'annule pour une valeur de h au plus égale à $\frac{\pi R}{2}$. Il en résulte évidemment, $\mathcal{S}'$ désignant l'aire ainsi décrite quand h varie de o à sa valeur maxima, et $\mathcal{S}(\alpha)$ l'aire décrite quand h varie de o à α, que le rapport $\frac{\mathcal{S}(\alpha)}{\mathcal{S}'}$ est, quel que soit α, minimum dans le cas de la sphère. Le même résultat s'applique pour la partie de S correspondant aux valeurs négatives de h. Par suite, la partie de S pour laquelle h est compris entre un nombre positif α' et un nombre négatif α'' constitue, quels que soient ces deux nombres, une fraction de la surface de plus en plus voisine de l'unité quand, R restant fixe, n augmente indéfiniment.

A la limite, dans l'espace fonctionnel, on obtient le résultat suivant : si une surface fermée convexe a le rayon de courbure de ses sections normales toujours au plus égal à un nombre fini R, et si C_0 désigne une géodésique fermée (d'ordre $\omega - 2$) de la surface, le voisinage de C_0 constitue presque toute la surface.

90. Ce résultat peut d'ailleurs s'établir plus simplement.

Dans l'espace fonctionnel, la surface minima Σ_0 limitée à $\mathcal{C}_0$ (dont nous établirons plus loin l'existence) est orthogonale à S. Le *tube*, limité par les normales à Σ_0 aux points de $\mathcal{C}_0$, a, d'après le n° 87, toutes ses sections Σ d'un ordre de grandeur au plus égal à la section de $\mathcal{C}_0$. Or il est circonscrit à S, et, dès qu'on s'éloigne d'une distance h du contour $\mathcal{C}_0$, la partie de Σ intérieure à S, obtenue en négligeant sur le contour une bande de largeur au moins égale à $\frac{h^2}{2R}$, est d'un ordre de grandeur inférieur à celui de Σ, et *a fortiori* à celui de Σ_0. Le voisinage de Σ_0 constitue donc presque tout le volume intérieur à S.

Le raisonnement du n° 89, plus long, avait l'avantage de nous donner un résultat applicable à l'espace E_n. Dans cet espace, la sur-

face minima limitée à C_0, et la surface minima contenant C_0 et orthogonale à S, sont distinctes. On ne peut alors étendre le principe du raisonnement précédent qu'en négligeant les parties du volume non situées dans le voisinage de la surface, ce qui est légitime si n est grand. On peut alors raisonner sur une surface minima orthogonale à S. Mais dans ces conditions, il est plus simple de raisonner sur la surface, et non sur le volume intérieur, et de remplacer les surfaces Σ parallèles à Σ_0 par les contours C parallèles à C_0; on est ainsi conduit aux raisonnements du n° 89.

91. **La notion de valeur moyenne dans le cas des surfaces convexes.** — Considérons toujours la surface fermée S, convexe, et telle que le rayon de courbure des sections normales soit toujours au plus égal à un nombre fini R. Nous allons démontrer, dans le cas d'une telle surface, le théorème général énoncé n° 15, déjà démontré dans le cas de la sphère, d'après lequel une fonctionnelle uniformément continue U a presque partout la même valeur. Cela revient au même, dans ce but, d'après le n° 57, de considérer les valeurs de U sur la surface S ou dans le volume V qu'elle limite; si en effet une portion de S constitue presque toute la surface, son voisinage constitue presque tout le volume.

Il existe au moins une valeur U_0 de U telle que la portion de la surface S pour laquelle $U_0 - \varepsilon < U < U_0 + \varepsilon$ constitue, quelque petit que soit ε, une fraction finie de l'aire totale. D'après le n° 61, le contour C_0 d'équation $U = U_0$ a alors une mesure au moins du même ordre que les contours $U =$ const. voisins de lui, de sorte que sa courbure géodésique moyenne est nulle presque partout.

Raisonnons d'abord comme si elle était partout nulle. Le voisinage du contour $U = U_0$ constitue presque toute la surface; en vertu de la continuité uniforme, dans ce voisinage U est très peu différent de U_0, et le théorème est démontré.

92. Il reste à revenir sur l'assimilation entre un contour dont la courbure géodésique moyenne est nulle presque partout, et un contour pour lequel elle est nulle partout. A cet effet, plaçons-nous d'abord dans l'espace E_n, et, comme nous l'avons fait dans le cas de la sphère, commençons par résoudre un problème de calcul des variations :

Parmi tous les contours limitant une aire donnée $\mathcal{A}$ sur la surface $\mathcal{S}$, trouver celui de mesure minima.

Désignons par $\mathcal{L}$ et $\mathcal{S}$ les mesures du contour C et de l'aire qu'il limite, et définissons sa déformation par le déplacement normal $\delta\nu$ de chacun de ses points. On a

$$\delta\mathcal{S} = \int_C^{(n-2)} \delta\nu \, d\mathcal{Q},$$

$$\delta\mathcal{L} = (n-2)\int_C^{(n-2)} K_g \, \delta\nu \, d\mathcal{Q},$$

de sorte que le minimum ne peut avoir lieu que pour un contour pour lequel K_g soit constant. Ce contour ne peut d'ailleurs admettre aucun point conique ou lieu de points coniques; en effet, on peut modifier le contour en évitant ces points, et de manière que la variation de $\mathcal{S}$ soit très petite en valeur absolue par rapport à celle de $\mathcal{L}$, cette dernière étant négative; on peut ensuite modifier le contour dans sa partie régulière, de manière à redonner à $\mathcal{S}$ la valeur voulue $\mathcal{A}$; la valeur finale de $\mathcal{L}$ est alors inférieure à la valeur initiale, qui ne peut constituer un minimum. Admettant l'existence de ce minimum, nous voyons qu'il existe un contour régulier, fermé sur lui-même, pour lequel K_g ait une valeur constante a. Admettons de plus, par raison de continuité [1], que a varie d'une manière continue de $+\infty$ à $-\infty$

---

[1] Il y a d'ailleurs quelque difficulté à rendre la démonstration rigoureuse sur ce point. Il peut arriver en effet que, pour une valeur $\mathcal{A}'$ de l'air $\mathcal{A}$ (ou pour plusieurs valeurs), le minimum de la mesure du contour soit réalisé pour deux contours différents C_1 et C_2, les contours voisins du premier donnant le minimum quand l'aire est inférieure à $\mathcal{A}'$, ceux voisins du second le donnant quand l'aire est supérieure à cette valeur. La courbure géodésique moyenne est alors une fonction de l'aire discontinue pour cette valeur.

On peut échapper à cette difficulté en remplaçant le problème de minimum absolu par un problème de minimum relatif. Un contour C_0 réalisant le minimum, pour une valeur très petite $\mathcal{A}_0$ de l'aire, on cherchera, pour les valeurs de l'aire un peu supérieures à $\mathcal{A}_0$, le contour voisin de C_0 et de mesure aussi petite que possible, et, continuant de même, on aura une famille de circonférences géodésiques fermées dépendant de $\mathcal{A}$ d'une manière continue. L'une d'elles sera alors une géodésique fermée, et la conclusion du texte subsiste.

Pour une étude plus approfondie de cette question, dans le cas des surfaces convexes de l'espace ordinaire, *voir* POINCARÉ, *Sur les géodésiques des surfaces convexes* (*Transactions of math. amer. Society*, t. VI, 1905; *voir* notamment le paragraphe 7 de ce Mémoire), et HADAMARD, *Sur quelques questions de calcul des variations* (*Ann. Ec. Norm.*, 1907; *voir* le n° 7).

quand $\mathcal{A}$ varie de zéro à l'aire totale $\mathcal{S}$ de S, nous voyons que a s'annule et que par suite il existe un contour régulier, fermé sur lui-même, et dont la courbure géodésique moyenne soit partout nulle; nous désignerons par $\mathcal{S}_0$ la valeur de l'aire limitée par ce contour.

Le voisinage de ce contour, lieu des points situés à une distance de lui inférieure à ε, a une aire sensiblement égale à $\mathcal{L}\varepsilon$. Nous savons que, pour n assez grand, il constitue presque toute la surface. Cela sera vrai *a fortiori* pour les autres contours entourant la même aire $\mathcal{S}_0$, et ayant par suite une mesure $\mathcal{L}$ supérieure. Or, parmi les aires définies par une inégalité de la forme $U < U_0$, il en existe certainement une égale à $\mathcal{S}_0$. Le voisinage du contour $U = U_0$ constitue alors presque toute la surface; en d'autres termes, pour n assez grand, la valeur U_0 compte seule dans le calcul de la moyenne.

93. Le raisonnement précédent prête encore à une objection; ε y apparaît tantôt comme un nombre fini, indépendant de n, tantôt comme un nombre infiniment petit. Pour rendre le raisonnement rigoureux à ce point de vue, nous prendrons un nombre ε bien déterminé, et appellerons *voisinage de* C, et désignerons par $\mathcal{V}_\varepsilon(C)$, ou simplement $\mathcal{V}(C)$, le lieu des points de S dont la distance à C, comptée sur la surface, soit inférieure à ε. Considérons le problème de calcul des variations suivant :

Parmi tous les contours limitant une aire donnée $\mathcal{A}$ sur la surface S, *trouver celui pour lequel $\mathcal{V}(C)$ ait une aire minima.*

La variation de l'aire $\mathcal{V}$ de $\mathcal{V}(C)$ est de la forme

$$\delta\mathcal{V} = \int_C (\alpha_1 - \alpha_2)\,\delta v\, d\mathcal{C},$$

α_1 et α_2 désignant le rapport, à l'élément $d\mathcal{C}$, les éléments correspondants des contours parallèles C_1 et C_2 qui limitent la région $\mathcal{V}(C)$. La solution du problème est alors un contour pour lequel $\alpha_1 - \alpha_2 =$ const., et, par raison de continuité, on peut encore trouver une valeur $\mathcal{S}_0$ de $\mathcal{A}$ telle que la constante soit nulle, et $\alpha_1 = \alpha_2$. Les portions correspondantes des contours C_1 et C_2 sont égales.

Or les régions élémentaires correspondantes d'une famille de contours parallèles forment, comme nous le savons, un tube dont la section, maxima pour celui dont la courbure géodésique moyenne est

nulle, décroît des deux côtés, au moins aussi vite que sur la sphère de rayon R. Le maximum a alors lieu nécessairement entre C_1 et C_2, et, si non seulement les rayons de courbure des sections normales de S sont finis, mais qu'ils soient des fonctions uniformément continues du point considéré de S et de la direction de la tangente, il est à peu près équidistant de C_1 et C_2; autrement, la décroissance de la section de chaque tube élémentaire se faisant à peu près suivant la même loi des deux côtés de la section maxima, les sections par C_1 et C_2 ne pourraient être égales. D'une manière précise, on peut limiter inférieurement la distance à chacun des contours C_1 et C_2 de cette section maxima; soit η cette limite inférieure. Comme les sections décroissent au moins aussi rapidement que sur une sphère de rayon R, la fraction de chaque tube située dans $\varphi(C)$ est au moins égale à la fraction de l'aire d'une sphère de rayon R comprise entre deux plans parallèles situés de part et d'autre du centre à la distance $R \sin \frac{\eta}{R}$. La fraction de l'aire de la surface S intérieure à $\varphi(C)$ est alors certainement inférieure à la même quantité, et tend vers 1 quand n augmente indéfiniment.

Cela est alors vrai *a fortiori* pour tout contour C limitant la même aire s_0, et en particulier pour le contour $U = U_0$, U_0 étant défini par la condition que U soit inférieur à U_0 sur une aire égale à s_0. Cette valeur de U_0 compte donc seule, pour n très grand, pour le calcul de la moyenne. C. Q. F. D.

94. Classification des surfaces et des volumes au point de vue de l'aspect de la notion de moyenne. — Nous appellerons *surface de la première catégorie* toute surface finie sur laquelle toute fonctionnelle uniformément continue a presque partout la même valeur. Les autres surfaces finies sont dites de la *deuxième catégorie*.

D'après ce qui précède, il est particulièrement simple, dans le cas des surfaces convexes, de montrer qu'elles sont de la première catégorie. Mais ce résultat une fois obtenu, il est facile de former d'autres surfaces de la première catégorie.

Donnons à chaque point M d'une surface S un déplacement, parallèle à une direction fixe, et de longueur a variable; nous supposerons que a, considéré comme fonction du point M, soit continu et admette une dérivée fonctionnelle bornée, c'est-à-dire que, si ds désigne un

arc élémentaire de la surface S, et da la variation correspondante de a, $\frac{da}{ds}$ existe et son module a une limite supérieure indépendante du point M et de la direction de l'arc ds. Le déplacement considéré transforme la surface S en une autre surface S′ telle que les rapports des longueurs ou des aires de S′ aux longueurs ou aux aires correspondantes de S soient finis. Il en résulte aisément, si la surface S est de la première catégorie, que la surface déformée l'est aussi.

En répétant cette opération, on peut obtenir des surfaces d'un très grand degré de généralité, qui sont de première catégorie.

95. La distinction en deux catégories que nous venons de faire au sujet des surfaces, ou des volumes qu'elles limitent, s'étend aisément à toutes les variétés à une infinité de dimensions.

Soit une surface S de la première catégorie, limitant un volume V. Désignons par $u_1, u_2, \ldots, u_p$ les valeurs moyennes de fonctionnelles $U_1, U_2, \ldots, U_p$, sur la surface S ou dans le volume V. La variété $\mathcal{R}_p$, à $\omega - p$ dimensions, lieu des points de V pour lesquels $U_1 = u_1$, $U_2 = u_2, \ldots, U_p = u_p$, constitue presque tout le volume V. Il en résulte qu'elle appartient à la première catégorie. Si en effet une fonctionnelle U avait des valeurs distinctes dans deux fractions finies de la région $\mathcal{R}_p$, elle aurait à peu près les mêmes valeurs dans les portions de V voisines respectivement de ces deux fractions de $\mathcal{R}_p$, et n'aurait pas par suite la même valeur dans presque tout le volume V.

En partant d'une région $\mathcal{R}_p$, à $\omega - p$ dimensions, et de n'importe quelle catégorie, il est facile de constituer des volumes de la deuxième catégorie. On peut obtenir un volume en considérant le lieu de régions $\mathcal{R}_p$ dépendant de p paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$; si toutes ces régions sont du même ordre de grandeur, c'est-à-dire si les rapports de leurs mesures sont finis, on obtient un volume V de deuxième catégorie.

Considérons dans ce volume p fonctionnelles $U_1, U_2, \ldots, U_p$. Les variétés définies dans V par les conditions $U_1 = c_1$, $U_2 = c_2, \ldots$, $U_p = c_p$ sont en général telles que leur voisinage constitue une fraction finie du volume total, du moins si le point $c_1, c_2, \ldots, c_p$ de l'espace E_p est dans un certain volume de cet espace. Alors la moyenne d'une fonctionnelle de la forme $f(U_1, U_2, \ldots, U_p)$ sera donnée par une intégrale d'ordre p.

Supposons maintenant les régions $\mathcal{R}_p$ de la première catégorie, et considérons un nombre quelconque q de fonctionnelles $U_1, U_2, \ldots, U_q$. Chacune d'elles a presque partout la même valeur dans chacune des régions $\mathcal{R}_p$. Par suite, en négligeant seulement des fractions négligeables du volume total, ces fonctionnelles sont des fonctions de λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_p$. Quelque grand que soit q, les systèmes de valeurs des fonctionnelles considérées, réalisés dans une fraction finie du volume total, dépendent au plus de p paramètres. La moyenne d'une fonctionnelle de la forme $f(U_1, U_2, \ldots, U_q)$ sera donnée par une intégrale d'ordre p.

Ce nombre p dépend évidemment seulement du volume considéré, et non du choix des régions $\mathcal{R}_p$ qui le décrivent. Nous dirons qu'un tel volume, ou la surface qui le limite, sont *de la deuxième catégorie, et d'ordre p*. Ce volume ne peut être décrit par des variétés de la première catégorie que si elles dépendent d'au moins p paramètres; et si elles dépendent de plus de p paramètres, c'est que certaines sont négligeables devant les autres, et celles dont il y a lieu de tenir compte pour les calculs de moyennes dépendent exactement de p paramètres.

96. Il peut exister des volumes de la deuxième catégorie et d'ordre infini. Tel est le volume V' défini par les conditions

$$x_1^2 < a_1^2, \qquad x_2^2 < a_2^2, \qquad \ldots, \qquad x_n^2 < a_n^2, \qquad \ldots,$$

les a_n étant tels que $\Sigma\, a_n^2$ converge.

Ce volume présente cette particularité d'être trop petit pour pouvoir contenir une sphère à son intérieur. Quelque petit que soit le rayon ρ d'une telle sphère, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de a_n supérieures à ρ en valeur absolue, et les diamètres de la sphère correspondant aux valeurs de a_n inférieurs à ρ en valeur absolue sortent du volume considéré.

Considérons alors le volume V, lieu des sphères de rayon R ayant leurs centres dans le volume V'. Il est de dimensions finies, et, si grand que soit p, les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_p$ prennent, dans des fractions non négligeables du volume total, des valeurs indépendantes. Le volume V est donc de deuxième catégorie et d'ordre infini.

Mais il présente une circonstance assez remarquable. Soient u une fonctionnelle uniformément continue, et U_1, en chaque point M, le

« potentiel sphérique », moyenne de U dans la sphère de centre M et de rayon R. On voit aisément que la moyenne de U dans V est égale à celle de U_1 dans V_1. Proposons-nous de la calculer avec une erreur au plus égale à un nombre positif ε, aussi petit que nous voulons, mais déterminé; désignons par η le module de continuité uniforme de la fonctionnelle U dans le volume V, correspondant à ε; il convient aussi dans le volume V_1 pour la fonctionnelle U_1. Prenons alors p assez grand pour que

$$a_{p+1}^2 + a_{p+2}^2 + \ldots < \eta^2.$$

On peut, pour le calcul de la moyenne cherchée, remplacer par zéro tous les x d'indices plus grand que p. U_1 se réduit alors à une fonction $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, et la moyenne cherchée est, à une erreur près, au plus égale à ε,

$$\frac{1}{2^p a_1 a_2 \ldots a_p} \int_{-a_1}^{+a_1} \int_{-a_2}^{+a_2} \cdots \int_{-a_p}^{+a_p} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_p)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_p.$$

Les seules valeurs de U qui comptent pour le calcul de la moyenne sont celles de U_1. On peut se contenter de considérer des valeurs dépendant d'un nombre fini de paramètres, qui ne dépend pas de la fonctionnelle considérée, mais seulement du module de continuité uniforme η correspondant à la précision cherchée; ainsi, pour une précision donnée, il sera le même pour toutes les fonctionnelles dont les dérivées premières ne dépassent pas un nombre déterminé, et plus généralement pour toute famille de fonctionnelles également et uniformément continues. Naturellement ce nombre p augmente indéfiniment avec la précision cherchée.

Cette circonstance s'étend à tous les volumes de deuxième catégorie et d'ordre infini ([1]). On peut donc les connaître assez bien, au point de vue du calcul de la moyenne des fonctionnelles, en n'étudiant que ceux d'ordres finis, dont la génération à partir des volumes de la première catégorie est très simple. On voit donc le rôle essentiel que jouent ces volumes de la première catégorie.

([1]) Pour y échapper, il faudrait engendrer un volume V en donnant à une variété $\mathcal{R}$ de la première catégorie des déplacements dépendant d'une infinité de paramètres, et d'amplitudes moyennes telles que la somme de leurs carrés ne converge pas. Mais alors le volume V ne serait pas situé dans une région finie de l'espace.

97. **Remarques diverses.** — Considérons un volume V, convexe, limité par une surface S. On peut considérer plusieurs quantités liées à l'ordre de grandeur de ce volume. Il est intéressant de les comparer entre elles.

Un raisonnement superficiel pourrait conduire à penser que, si la surface S est de la première catégorie, ayant presque partout même rayon de courbure moyenne et même rayon de courbure totale, elle est *presque une sphère*, et que ces diverses quantités sont égales. Il n'en est rien.

Une première grandeur à considérer est le rayon R de la sphère de volume équivalent à celui de V. On démontre sans peine que c'est aussi le rayon de la sphère de surface équivalente à celle de S, et qu'on ne change pas non plus ce rayon en remplaçant le volume V et la sphère par leurs projections sur un plan à $\omega - p$ dimensions. Bien entendu, la mesure de la projection du volume dépend du plan choisi, mais le rapport entre les mesures de deux telles projections, fini ou infini, ne peut être de l'ordre de grandeur de $a^{\omega}(a \neq 1)$, et est sans influence sur le rayon de la sphère équivalente.

D'autre part, si la surface S est de la première catégorie, le rayon de courbure totale a presque partout la même valeur R′, tandis que si on le considère comme fonction du point de la sphère sur laquelle on représente l'ellipsoïde, il a presque partout la même valeur R″.

Les nombres R, R′, R″ ne sont pas nécessairement égaux. Par des remarques analogues à celles du n° 76 sur l'inégalité (36), on peut montrer que

$$R' \geqq R \geqq R''. \tag{47}$$

98. Il y a d'autre part une relation entre la courbure moyenne K, et la distance p du plan tangent à un point fixe O; nous compterons cette distance positivement vers l'intérieur. A cet effet, faisons varier la surface S, en la remplaçant par une surface homothétique par rapport à O et très voisine, le rapport d'homothétie étant $1 + \varepsilon$. Faisons se correspondre les points des deux surfaces situés sur une même normale à S; leur distance est $p\varepsilon$. Chaque élément d'aire varie alors d'une surface à la voisine comme dans une homothétie de rapport $1 + Kp\varepsilon$. Pour l'ensemble de la surface, d'après la formule (8), la variation relative du rayon R de la sphère équivalente est alors $m_1\varepsilon$ ou $m_2\varepsilon$, suivant le signe de ε, m_1 et m_2 désignant les valeurs extrêmes

de Kp, en négligeant celles qui ne seraient prises que sur des portions de la surface pour lesquelles le rayon de la sphère équivalente serait inférieur à R. D'autre part, comme il s'agit d'une homothétie, cette variation relative est égale à ε, quel que soit le signe de cette quantité. Donc $m_1 = m_2 = 1$. *Le produit* Kp *est presque partout égal à* 1.

Il est remarquable que cet énoncé s'applique quel que soit le point O, et quelle que soit la surface. Si elle est de la première catégorie, on peut dire que p et $\frac{1}{K}$ ont presque partout une même valeur h. Si elle est de la deuxième catégorie, p et $\frac{1}{K}$ sont presque partout égaux, et nous désignerons leur valeur moyenne commune par h. La formule (10) s'écrit alors [1]

$$h = \frac{\omega \mathcal{V}}{S}. \tag{48}$$

Montrons par un exemple que h n'est pas nécessairement égal à R. Nous n'avons qu'à reprendre l'exemple, déjà considéré n° 74, de l'ellipsoïde

$$U = \int_0^1 [x^2(t) + x(t)x(1-t) + x^2(1-t)]\,dt = 1.$$

C'est une surface de la première catégorie. On trouve aisément

$$p = \frac{1}{\sqrt{4 - 3r^2}},$$

de sorte que le calcul de h se ramène au calcul de la valeur moyenne de r^2, ou de $\frac{r^2}{U}$, sur la surface, ou ce qui revient au même à l'intérieur (*voir* numéro suivant). Comme une dilatation suivant les axes modifie tous les volumes dans le même rapport, on ramène aisément ce calcul à celui de la moyenne sur une sphère, et l'on trouve que r^2 a presque

---

[1] On a une formule analogue dans l'espace E_n. La variation du volume $\mathcal{V}$ dans l'homothétie de rapport $1 + \varepsilon$ est en effet

$$dV = nV\varepsilon = \int_S p\varepsilon\, dS = S h \varepsilon.$$

On a donc $nV = hS$, h désignant la moyenne de p sur la surface S. A la limite, on retrouve la formule du texte, dont on a ainsi une démonstration très simple. Le raisonnement du texte a par contre l'avantage de montrer la relation entre p et k.

partout la valeur $\frac{2}{3}$. Donc $h = \frac{1}{\sqrt{2}}$, tandis que, les demi-axes de l'ellipsoïde étant égaux les uns à 1 et les autres à $\frac{1}{\sqrt{3}}$, on a $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

99. Les surfaces de la première catégorie étant telles que toute fonctionnelle uniformément continue y a presque partout la même valeur, cela est vrai en particulier de la courbure moyenne. D'après le n° 57, nous pouvons alors affirmer que, pour une telle surface, cela revient au même de prendre la moyenne d'une fonctionnelle uniformément continue sur cette surface ou dans le volume qu'elle limite. Ces deux moyennes sont égales.

Cette propriété n'est d'ailleurs ni générale, ni caractéristique des surfaces de la première catégorie. Considérons par exemple une surface S de la deuxième catégorie, et d'ordre 1, décrite par des contours C, de la première catégorie, et situés dans des plans parallèles. Pour tous ces contours, le rayon de la sphère équivalente a une même valeur R. D'autre part, chacun des plans parallèles est presque partout normal à la surface S (autrement l'ordre de grandeur de la mesure du contour varierait, et R ne serait pas constant). La valeur moyenne, sur chaque contour C, de la courbure moyenne K de la surface est donc aussi celle de la courbure moyenne du contour. L'exemple du numéro précédent [1] montre qu'elle peut n'être pas égale à $\frac{1}{R}$, et par suite qu'elle peut varier d'un contour à l'autre; alors, d'après le n° 51, les différents contours C n'auront pas le même poids pour le calcul de la moyenne d'une fonctionnelle sur la surface S et dans le volume qu'elle limite. Si au contraire la moyenne de K est la même pour tous les contours C, les moyennes d'une fonctionnelle quelconque sur la surface et dans le volume sont égales.

---

[1] Dans cet exemple nous considérions une surface de l'espace fonctionnel; il suffit d'en prendre la section par un plan contenant le centre pour avoir un contour C jouissant dans un plan d'une propriété analogue.

CHAPITRE V.

LES FONCTIONNELLES HARMONIQUES.

Sommaire : Formule de dérivation des fonctionnelles composées. — Conséquence relative à certaines équations aux dérivées fonctionnelles. — Formule fondamentale pour l'étude du problème de Cauchy. — Extension de la formule de Green. — La formule de Green sur une surface. — La formule de Green et le potentiel. — Le potentiel de double couche. — Remarques sur la solution du problème de Dirichlet et les propriétés des surfaces minima. — Les problème de Cauchy et de Dirichlet pour des variétés quelconques situées sur une surface fermée convexe. — Cas de surfaces non convexes. — La notion de variété minima; conclusion relative au problème de la détermination d'une fonctionnelle harmonique par ses valeurs sur une variété quelconque. — Cas des variétés minima. — Le potentiel de simple couche. — Le potentiel de volume. — Le problème de Neumann.

100. **Formules de dérivation des fonctionnelles composées.** — Soit, pour fixer les idées, une fonction $\Phi = f(U, V, W)$ de trois fonctionnelles U, V, W. Cherchons à exprimer $\Delta\Phi$ en fonction de ΔU, ΔV, ΔW. On a d'abord, pour les dérivées premières, la formule évidente

$$\Phi'_x = f'_U U'_x + f'_V V'_x + f'_W W'_x.$$

Si l'on calcule la variation de Φ'_x, en supposant que les variations secondes de U, V, W soient de la forme normale, on trouve

$$\begin{aligned}\delta\Phi'_x = {} & (f'_U U''_{x^2} + f'_V V''_{x^2} + f''_W W''_{x^2})\,\delta x \\ & + \int_0^1 (f'_U U''_{xx_1} + f'_V V''_{xx_1} + f'_W W''_{xx_1} \\ & \qquad + f''_{U^2} U'_x U'_{x_1} + f''_{V^2} V'_x V'_{x_1} + f''_{W^2} W'_x W'_{x_1})\,\delta x_1\, dt_1.\end{aligned}$$

Donc la variation seconde de Φ est aussi de forme normale, et l'on a

$$\Phi''_{x^2} = f'_U U''_{x^2} + f'_V V''_{x^2} + f'_W W''_{x^2}. \tag{1}$$

Si les variations secondes de U, V, W ne sont pas de la forme

normale, l'expression de $\delta\Phi'_x$ peut contenir d'autre termes, provenant de la différentiation de U'_x, V'_x, W'_x. Mais cela ne changera rien aux terme en δx, et la formule (1) reste exacte.

Si même les variations premières de U, V, W n'étaient pas de la forme normale, mais dépendaient spécialement de certaines valeurs de t, soit t', t'', ..., la variation $\delta\Phi'_x$ contiendrait des termes en $\delta x(t')$, $\delta x(t'')$, ..., et, si t est précisément égal à l'une de ces valeurs t', t'', ..., l'un de ces termes se réunit au terme en δx, et la formule (1) ne serait pas exacte. Mais ces valeurs particulières de t constituent au plus un ensemble de mesure nulle, de sorte que, même dans ce cas, la formule (1) est presque partout exacte.

En tout cas, en intégrant par rapport à t entre 0 et 1, il vient

$$\Delta\Phi = f'_U \Delta U + f'_V \Delta V + f'_W \Delta W. \tag{2}$$

Les formules (1) et (2) montrent que les calculs des dérivées secondes ou paramètre différentiel du second ordre Φ''_{x^2} et $\Delta\Phi$ se font par les formules qui ne conviennent habituellement que dans les cas des dérivées premières. Cette conclusion ne s'applique pas, bien entendu, à la dérivée Φ''_{xx_1} pour laquelle on a

$$\Phi''_{xx_1} = f'_U U''_{xx_1} + f'_V V''_{xx_1} + f'_W W''_{xx_1} + f''_{U^2} U'_x U'_{x_1} + f''_{V^2} V'_x V'_{x_1} + f''_{W^2} W'_x W''_{x_1},$$

formule tout à fait analogue à celle relative aux fonctions composées à l'aide de fonctions ordinaires.

Il résulte en particulier de ces formules que :

1° Si U, V, W sont des fonctionnelles de Gateaux, il en est de même de Φ;

2° Si U, V, W sont des fonctionnelles harmoniques, il en est de même de Φ.

En particulier, on voit que les fonctionnelles U et $f(U)$ sont en même temps harmoniques. On peut donc reconnaître si une fonctionnelle est harmonique lorsque l'on connaît les surfaces de niveau $U = \text{const.}$, sans connaître la valeur de U correspondant à chaque surface. Nous avons déjà obtenu un résultat plus précis en démontrant (n° 25) que les fonctionnelles harmoniques sont celles pour lesquelles les surfaces de niveau sont minima.

101. On peut obtenir les mêmes résultats par la méthode du pas-

sage du fini à l'infini. Si, au lieu de U, V, W, Φ, on considère des fonctions u, v, w φ de n variables indépendantes, on a

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)^2,$$

ou, en désignant par Δ la moyenne des n dérivées $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$,

$$\Delta\varphi = \frac{\partial f}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial f}{\partial v}\Delta v + \frac{\partial f}{\partial w}\Delta w + \frac{1}{n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\Delta_1 u + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\Delta_1 v + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\Delta_1 w\right).$$

Lorsque n devient infini, $\Delta_1 u$, $\Delta_1 v$ et $\Delta_1 w$ restent finis, et l'on a bien à la limite la formule (2).

De même, l'expression de $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}$ donne à la limite la formule (1), les termes en $\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2$, $\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2$ et $\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)^2$ étant négligeables à côté des autres.

102. Conséquence relative à certaines équations aux dérivées fonctionnelles. — Considérons l'équation

$$\Delta U = f(U). \tag{3}$$

Désignons par $F(\alpha)$ une fonction primitive de $\frac{1}{f(\alpha)}$. D'après la formule (2), cette équation s'écrit

$$\Delta F(U) = 1,$$

ou, comme $\Delta r^2 = 2$,

$$\Delta\left[F(U) - \frac{r^2}{2}\right] = 0.$$

Sa solution générale est donc définie implicitement par la formule

$$F(U) - \frac{r^2}{2} = V,$$

où V désigne une fonctionnelle harmonique quelconque.

Ainsi l'équation (3) se ramène à l'*équation de Laplace :*

$$\Delta V = 0.$$

La solution du problème de Dirichlet relatif à l'équation (3), c'est-

à-dire la recherche d'une solution prenant sur une surface une valeur donnée U_0 se ramène à la recherche d'une fonctionnelle harmonique égale sur cette surface à $F(U_0) - \frac{r^2}{2}$. Si la solution de ce problème est unique pour l'équation de Laplace, il en est donc de même pour l'équation (3).

On remarque que ces circonstances sont analogues à celles qui se présentent dans l'analyse ordinaire pour l'équation du premier ordre $\frac{du}{dx} = f(u)$, et tout à fait différentes de celles qui se présentent pour l'équation $\Delta u = f(u)$. Ainsi on sait que, pour l'équation $\Delta u = \lambda u$, en analyse ordinaire, la solution du problème de Dirichlet, bien déterminée en général, devient indéterminée pour certaines valeurs de λ. Au contraire, en analyse fonctionnelle, l'équation

$$\Delta U = \lambda U \tag{4}$$

admet comme solution générale, d'après ce qui précède, la fonctionnelle

$$U = e^{\lambda \frac{r^2}{2} V} = W e^{\lambda \frac{r^2}{2}},$$

W, ou ce qui revient au même son logarithme V, étant une fonctionnelle harmonique quelconque. Le problème de Dirichlet est donc déterminé pour l'équation (4) comme il l'est pour l'équation de Laplace, dans des conditions que nous préciserons plus loin; cela ne peut pas dépendre de λ.

103. Formule fondamentale pour l'étude du problème de Cauchy. — En analyse ordinaire, le problème de Cauchy, relatif à une équation aux dérivées partielles du second ordre, consiste à chercher une solution u connaissant sa valeur et celle de la dérivée normale $\frac{du}{dy}$ sur une surface; pour résoudre ce problème, il est commode de résoudre l'équation étudiée par rapport à $\frac{d^2 u}{dy^2}$.

En cherchant la formule analogue relative à l'équation de Laplace en analyse fonctionnelle, on obtient des circonstances tout à fait différentes : $\frac{d^2 U}{dy^2}$ n'intervient pas dans l'équation. ΔU est en effet une moyenne entre une infinité de dérivées secondes, et une de ces déri-

vées, prise isolément, est sans influence sur sa valeur; ΔU ne dépend pas de $\frac{d^2 U}{d\nu^2}$.

Nous pouvons par contre obtenir une relation entre les valeurs de U sur la surface et $\frac{dU}{d\nu}$. Nous désignerons par $\frac{dU}{ds}$ et $\frac{d^2 U}{ds^2}$ les dérivées relatives à un déplacement sur une section normale de la surface S, ds désignant l'élément d'arc décrit; pour un déplacement correspondant sur la tangente, la dérivée première a la même valeur, et nous désignerons la dérivée seconde par $\frac{d^2 U}{dx^2}$ (¹). On a d'ailleurs

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{d^2 U}{ds^2} - k\frac{dU}{d\nu},$$

k désignant la courbure de la section normale correspondante; les déplacememts considérés ayant lieu en effet dans un plan à deux dimensions, les formules de la géométrie ordinaire s'appliquent sans difficulté.

Or ΔU est la moyenne des dérivées secondes telles que $\frac{d^2 U}{dx^2}$, relatives à toutes les directions de l'espace; c'est une moyenne sur une sphère, et pour la calculer on peut ne tenir compte que des points situés dans un plan à $\omega - 1$ dimensions contenant le centre; on peut donc considérer ΔU comme la moyenne des valeurs de $\frac{d^2 U}{dx^2}$ dans toutes les directions du plan tangent. Désignons par $\Delta_S U$ la moyenne, dans les mêmes conditions, des valeurs de $\frac{d^2 U}{ds^2}$; cette quantité ne dépend que des valeurs de U sur la surface. Désignons enfin par K la courbure moyenne de la surface S. Nous obtenons la formule

$$\Delta U = \Delta_S U - K\frac{dU}{d\nu}, \tag{5}$$

d'après laquelle le problème de Cauchy relatif à l'équation de Laplace

---

(¹) Nous avons employé dans des conditions analogues la notation $\frac{d^2 u}{dt^2}$ (première Partie, Chap. V). Ici il y a lieu d'éviter la confusion avec la variable t, argument de la fonction $x(t)$. Nous écrivons de même ici $\frac{d}{d\nu}$ au lieu de $\frac{d}{dn}$ pour la dérivée normale, pour réserver la lettre n aux considérations relatives à l'espace à n dimensions.

en analyse fonctionnelle apparaît comme analogue au problème de Cauchy de l'analyse ordinaire relatif aux équations du premier ordre, et non du second.

104. On remarque d'ailleurs que, si la surface S est minima, la dérivée normale n'intervient même pas. L'équation de Laplace se réduit à $\Delta_S U = 0$; c'est une condition ne faisant intervenir que les valeurs de U sur la surface; nous dirons lorsqu'elle est vérifiée que la fonctionnelle U est *harmonique sur la surface* S (définition applicable que cette surface S soit minima ou non).

Considérons alors un volume $\mathcal{V}$ décrit par une surface minima S, dépendant d'un paramètre λ, deux positions différentes de cette surface étant sans point commun. La condition nécessaire et suffisante pour que la fonctionnelle U soit harmonique dans ce volume est qu'elle soit harmonique sur chacune des surfaces S [1].

Cette remarque renseigne sur la nature analytique des fonctionnelles harmoniques. La forme de la fonctionnelle harmonique définie sur chaque surface peut varier d'une façon tout à fait arbitraire d'une surface à l'autre. On peut en particulier ajouter à U une fonction arbitraire de λ. Cette fonction peut n'être pas analytique, avoir des dérivées discontinues, être discontinue elle-même.

Revenons alors à la formule (5). En n'importe quel point M d'une surface non minima S, la dérivée normale $\frac{dU}{d\nu}$ peut ne pas avoir la même valeur des deux côtés de la surface, comme on le voit en appliquant la remarque précédente à une famille de surfaces minima dont l'une, que nous désignerons par Σ, touche S en M. La formule (5) ne s'applique qu'à une des valeurs de $\frac{dU}{d\nu}$.

Il est facile de préciser laquelle. On peut supposer que la surface Σ, si K n'est pas nul en M, soit tout entière dans le voisinage de ce point d'un même côté de S, celui de la *convexité moyenne;* $\frac{dU}{d\nu}$ peut être discontinu à la traversée d'une telle surface Σ. Les valeurs de U sur S

---

[1] Ce résultat comprend comme cas particulier celui du n° 25 d'après lequel il suffit, pour que la fonctionnelle U soit harmonique, qu'elle soit constante sur chacune des surfaces S. D'ailleurs la formule (13) du n° 24, dont nous avons déduit ce résultat, n'est autre que la formule (5) appliquée aux surfaces de niveau U = const.; $\frac{dU}{d\nu}$ a alors, au signe près, la valeur $\sqrt{\Delta_1 U}$.

ne dépendent alors évidemment que des valeurs de cette dérivée du côté de la concavité moyenne de S; c'est donc la valeur relative à ce côté, et au point M, qui intervient dans la formule (5).

On peut arriver au même résultat en remplaçant dans ce raisonnement la surface Σ par le plan tangent à la surface S en M. Cette surface n'est pas nécessairement tout entière du même côté de ce plan, mais elle l'est presque tout entière (puisque dans presque toutes les directions la courbure normale a la même valeur non nulle K), et cela suffit pour conclure.

105. De cette formule, on peut tirer d'importantes conséquences relatives aux différents problèmes qui peuvent se poser pour la détermination des fonctionnelles harmoniques.

1° Si une fonctionnelle harmonique est connue d'un côté d'une surface minima, cela ne permet pas de déterminer sa valeur en aucun point situé de l'autre côté. *A fortiori*, si elle est connue du côté de la concavité moyenne d'une surface S pour laquelle K soit de signe constant, on ne peut rien en déduire concernant sa valeur de l'autre côté. Si S est une surface ouverte limitée par un contour C, on ne peut donc espérer la déterminer que dans le volume compris entre S et une surface minima limitée à C. Si S est une surface convexe fermée, on ne peut espérer la déterminer qu'à l'intérieur.

2° Plaçons-nous dans ce dernier cas. Les surfaces U = const. sont des surfaces minima dont on connaît l'intersection avec S. Le problème de Dirichlet (détermination de U à l'intérieur connaissant ses valeurs sur la surface) se ramène donc au problème de détermination de la surface minima limitée à un contour donné.

On pourrait poursuivre ces remarques. Mais la démonstration de l'unicité de la solution du problème de Dirichlet nécessite l'extension de la formule de Green à l'analyse fonctionnelle. Nous allons étudier cette extension. Nous reviendrons ensuite à l'étude des propriétés de cette solution.

106. Extension de la formule de Green. — Formons d'abord cette formule par la méthode du passage du fini à l'infini. Dans l'espace E_n, considérons un volume $\mathcal{V}$ limité par une surface S. Nous désignerons par $\frac{du}{dv}$ la dérivée d'une fonction u suivant la normale à la surface S,

dirigée vers l'extérieur, et poserons

$$\Delta' u = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right).$$

En désignant par u et v deux fonctions continues dans $\mathcal{V}$ ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres, la formule de Green s'écrit

$$(6) \qquad \int_{\mathcal{V}}^{(n)} (u\,\Delta' v - v\,\Delta' u)\,d\mathcal{V} = \frac{1}{n}\int_{S}^{(n-1)} \left(u\frac{dv}{d\nu'} - v\frac{du}{d\nu'}\right) dS.$$

Pour n'avoir à la limite que des quantités finies, divisons les deux membres par $\mathcal{V}$, mesure du volume $\mathcal{V}$; h ayant la même signification qu'au n° 98, en note, et $\mathfrak{M}_{\mathcal{V}}$ et $\mathfrak{M}_S$ désignant des moyennes relatives respectivement au volume $\mathcal{V}$ et à la surface S, il vient

$$(6') \qquad h\,\mathfrak{M}_{\mathcal{V}}(u\,\Delta' v - v\,\Delta' u) = \mathfrak{M}_S\left(u\frac{dv}{d\nu'} - v\frac{du}{d\nu'}\right).$$

Le passage du fini à l'infini conduit alors aux formules

$$(7) \qquad \int_{\mathcal{V}}^{(\omega)} (\mathrm{U}\,\Delta\mathrm{V} - \mathrm{V}\,\Delta\mathrm{U})\,d\mathcal{V} = \frac{1}{\omega}\int_{S}^{(\omega-1)} \left(\mathrm{U}\frac{d\mathrm{V}}{d\nu'} - \mathrm{V}\frac{d\mathrm{U}}{d\nu'}\right) dS,$$

$$(7') \qquad h\,\mathfrak{M}_{\mathcal{V}}(\mathrm{U}\,\Delta\mathrm{V} - \mathrm{V}\,\Delta\mathrm{U}) = \mathfrak{M}_S\left(\mathrm{U}\frac{d\mathrm{V}}{d\nu} - \mathrm{V}\frac{d\mathrm{U}}{d\nu}\right).$$

Elles sont équivalentes, la première étant écrite sous forme symbolique, et la deuxième ne contenant que des quantités finies.

Le raisonnement par induction qui précède ne constitue pas une démonstration. Pour démontrer ces formules, il suffirait de montrer que, si u et v sont les valeurs de U et V dans la $n^{\text{ième}}$ section du volume $\mathcal{V}$, $\Delta' u$, $\Delta' v$, $\frac{du}{d\nu'}$, $\frac{dv}{d\nu'}$ tendent uniformément vers leurs limites $\Delta\mathrm{U}$, $\Delta\mathrm{V}$, $\frac{d\mathrm{U}}{d\nu}$, $\frac{d\mathrm{V}}{d\nu}$. Or il en est bien ainsi pour les deux premières, du moins moyennant des conditions assez peu restrictives imposées aux fonctionnelles U et V. Au contraire, la normale à la surface S en un point fixe fait avec le plan de la $n^{\text{ième}}$ section un angle qui tend vers zéro, mais le maximum de sa valeur dans toute la section peut ne pas tendre vers zéro quand n augmente indéfiniment, et par suite $\frac{du}{d\nu'}$ peut ne pas tendre uniformément vers $\frac{d\mathrm{U}}{d\nu}$. Pour cette raison, une démonstration par induction des formules (7) et (7') ne

paraît pas facile; nous allons opérer autrement, en nous appuyant sur les résultats déjà obtenus dans l'espace fonctionnel.

107. Plaçons-nous d'abord dans le cas d'une surface S de la première catégorie. Il suffit alors de démontrer la formule

$$(8) \qquad h\,\mathfrak{M}_{\mathcal{V}}(\Delta U) = \mathfrak{M}_S\left(\frac{dU}{d\nu}\right).$$

En multipliant les fonctionnelles intégrées par V, qui a presque partout la même valeur, la formule reste exacte; intervertissant les fonctionnelles U et V, et retranchant l'une de l'autre les formules obtenues, on obtient la formule (7').

Supposons d'abord que la fonctionnelle U soit harmonique; il s'agit de montrer que la dérivée $\frac{dU}{d\nu}$ est nulle sur presque toute la surface. Or U a presque partout une même valeur U_0. Le contour C, défini sur la surface par l'équation $U = U_0$, constitue donc presque toute la surface, et par suite sa courbure géodésique moyenne presque partout nulle (n° 61); en d'autres termes, la surface minima définie dans $\mathcal{V}$ par l'équation $U = U_0$, qui coupe la surface S suivant le contour C, la coupe suivant un angle presque partout droit. Donc $\frac{dU}{d\nu}$ est nul sur presque tout le contour C, c'est-à-dire sur presque toute la surface.

Un raisonnement analogue conduit à la formule (8) quand U n'est pas harmonique. Définissons comme dans le cas précédent le contour C, d'équation $U = U_0$, constituant presque toute la surface et dont le plan osculateur moyen est normal à la surface S en des points M constituant presque toute la surface. En un tel point, désignons par K la courbure moyenne de S, qui est aussi celle de C, et par θ l'angle de cette surface avec la surface $U = U_0$. La courbure moyenne de cette surface est, d'après le théorème de Meusnier,

$$\frac{\Delta U}{\sqrt{\Delta_1 U}} = K\cos\theta.$$

On a d'autre part évidemment, pour les points M considérés,

$$\frac{dU}{d\nu} = \sqrt{\Delta_1 U}\cos\theta,$$

et par suite

$$\Delta U = K \frac{dU}{d\nu}.$$

Comme d'autre part, pour presque tous les points M considérés, ΔU, K, et $\frac{dU}{d\nu}$ sont égaux à leurs moyennes, on a

$$\mathfrak{M}_S\left(\frac{dU}{d\nu}\right) = \mathfrak{M}_S\left(\frac{1}{K}\right)\mathfrak{M}_S(\Delta U) = h\,\mathfrak{M}_S(\Delta U),$$

et, la surface étant de la première catégorie, $\mathfrak{M}_S = \mathfrak{M}_\mathcal{V}$, ce qui établit la formule (8).

108. Considérons maintenant une surface S, de la deuxième catégorie et d'ordre 1. On peut la considérer comme lieu d'une simple infinité de contours C de la première catégorie, et dont les mesures sont du même ordre de grandeur, de sorte que, pour chacun d'eux, la courbure géodésique moyenne est presque partout nulle.

On peut considérer chacun de ces contours comme constituant presque toute une surface S′, inscrite dans S et intérieure à S, et, en appliquant la formule (8) à cette surface, on voit qu'on a une relation analogue sur le contour C; les courbures moyennes de S et S′ le long de C étant égales, elle s'écrit

$$\mathfrak{M}_C\left(\frac{dU}{d\nu}\right) = \mathfrak{M}_C\left(\frac{1}{K}\right)\mathfrak{M}_C(\Delta U).$$

Les contours C divisent la surface S en tranches $S_1, S_2, \ldots, S_n$; sur chaque tranche S_i, d'aire s_i, K a presque partout une même valeur K_i, et l'on a

$$\sum s_i\,\mathfrak{M}_i\left(\frac{dU}{d\nu}\right) = \sum \frac{s_i}{K_i}\,\mathfrak{M}_i(\Delta U),$$

$\mathfrak{M}_i$ désignant une moyenne sur la tranche S_i. Or la moyenne sur S s'obtient en donnant aux diverses tranches S_i des poids proportionnels à leurs aires, tandis que la moyenne dans $\mathcal{V}$ s'obtient en leur donnant des poids proportionnels à $\frac{s_i}{K_i}$. La formule précédente donne donc, à la limite,

$$s\,\mathfrak{M}_S\left(\frac{dU}{d\nu}\right) = \mathfrak{M}_\mathcal{V}(\Delta U)\lim\sum\frac{s_i}{K_i} = s\,h\,\mathfrak{M}_\mathcal{V}(\Delta U),$$

ce qui établit la formule (8).

Ce raisonnement se généralise sans peine à deux points de vue. D'une part, on peut raisonner sur la formule (7') au lieu de la formule (8). D'autre part, au lieu de surfaces de la deuxième catégorie et d'ordre 1, lieu d'une simple infinité de contours C, on peut considérer une surface de la deuxième catégorie et d'ordre p, lieu de variétés de la première catégorie dépendant de p paramètres. La formule de Green est donc établie pour toutes les surfaces d'ordres finis.

On peut passer de là aux surfaces dont l'ordre est infini, en remarquant qu'une telle surface S peut être considérée comme limite de surfaces S' d'ordres finis, telle que la moyenne sur S' d'une fonctionnelle uniformément continue tende vers sa moyenne sur S. Il est probablement possible de supposer que le voisinage de S et S' est d'ordre 1, c'est-à-dire que l'angle des plans tangents aux deux surfaces tend vers zéro, et cela uniformément sur presque toute la surface. Alors les valeurs moyennes de $\frac{dU}{dv}$, et de p (distance du plan tangent à un point fixe), sur S', tendent respectivement vers les valeurs moyennes des mêmes quantités sur S, et la formule de Green en résulte.

Nous ne chercherons pas à rendre ce raisonnement plus rigoureux. Peut-être serait-on conduit à quelques restrictions concernant le mode de continuité du plan tangent à la surface. Ce qui précède nous permet de considérer la formule de Green comme établie dans presque tous les cas. D'ailleurs les résultats principaux que nous en déduirons dans la suite reposent sur l'application au cas de la sphère, qui ne présente aucune difficulté.

109. **La formule de Green sur une surface.** — On peut établir sur une surface des formules analogues à celles relatives à l'espace, et ne faisant intervenir que les valeurs d'une fonctionnelle sur la surface.

Considérons d'abord une surface fermée, S, de la première catégorie. La comparaison des formules (5) et (8) montre que, sur cette surface, $\Delta_S U$ est presque partout nul. Ce résultat s'étend, par un raisonnement analogue à celui du numéro précédent, aux surfaces de la deuxième catégorie et d'ordres finis, que l'on peut considérer comme lieux de variétés de la première catégorie sur chacune desquelles $\Delta_S U$ est presque partout nul, puis à celles d'ordre infini.

On peut alors indifféremment écrire

$$\mathfrak{M}_S\left(\frac{1}{K}\Delta_S U\right) = 0, \qquad \mathfrak{M}_S(\Delta_S U) = 0.$$

La première formule n'est qu'une forme différente de celle de Green; la deuxième apparaît comme une généralisation de la formule

$$\int \frac{d^2 u}{ds^2} ds = 0,$$

relative au cas de l'espace à deux dimensions, ou plus généralement à une ligne fermée dans un espace quelconque.

Si l'on considère une portion de surface ouverte, il y a deux cas à distinguer, suivant que le voisinage du contour C de cette surface constitue ou non presque toute la portion considérée. Ainsi, divisons une surface fermée S', par un contour C, en deux portions de surface S_1 et S_2. En général elles seront d'un ordre de grandeur différent; pour la plus petite, le voisinage du contour C constitue presque toute la surface, tandis que pour l'autre il n'en constitue qu'une fraction négligeable. Cela revient à peu près au même d'écrire la formule de Green pour cette dernière portion de surface, ou pour toute la surface fermée. Nous nous contenterons alors de considérer une portion de surface S, située presque tout entière dans le voisinage de son contour C. La formule qui généralise la formule (8) s'écrit alors

$$(9) \qquad h\,\mathfrak{M}_S(\Delta_S U) = \mathfrak{M}_C\left(\frac{dU}{d\nu}\right), \qquad h = \mathfrak{M}_C\left(\frac{1}{K_g}\right),$$

$\frac{d}{d\nu}$ indiquant une dérivation relative à la direction du plan tangent à S normale à C, et K_g la courbure géodésique moyenne de C. On écrit de même la formule qui généralise la formule (7').

Si la surface S est minima, on peut la considérer comme constituant presque tout un volume, limité par une surface Σ contenant C et normale à S, et la formule (9) n'est pas autre chose que la formule (8) appliquée à ce volume.

Dans le cas général, on établit la formule (9) en raisonnant sur la surface comme nous l'avons fait dans l'espace pour établir la formule (8). On considère d'abord le cas d'un contour C de la première catégorie, et l'on démontre que $\Delta_S U$, $\frac{dU}{d\nu}$ et K_g sont presque partout

liés par la relation

$$\Delta_S U = K_g \frac{dU}{d\nu},$$

qui donne la formule (9) puisque chacune des quantités considérés a presque partout la même valeur. On passe de là aux contours de la deuxième catégorie, d'ordre fini, puis infini.

110. Dans l'espace E_n, il existe une relation simple entre les formules de Green dans l'espace et sur une surface; l'une peut se déduire de l'autre.

Considérons par exemple un volume $\mathcal{V}$ limité par deux surfaces parallèles S_0 et S, et une surface latérale Σ, lieu des normales à S le long du contour C qui limite cette surface. La formule de Green, dans le cas où $\nu = 1$, s'écrit

$$n \int_{\mathcal{V}}^{(n)} \Delta u \, d\mathcal{V} = \int_S \frac{du}{d\nu} dS - \int_{S_0} \frac{du}{d\nu} dS_0 + \int_\Sigma \frac{du}{d\nu} d\Sigma.$$

Écrivons qu'elle reste vérifiée quand S varie, S_0 restant fixe. Il vient

$$n \int_S^{(n-1)} \Delta u \, dS = \int_S \left[\frac{d^2 u}{d\nu^2} - (n-1) K \frac{du}{d\nu} \right] dS + \int_C \frac{du}{d\nu'} d\mathcal{Z},$$

$\frac{d}{d\nu'}$ désignant une dérivée suivant la direction du plan tangent à S normale à C. Or

$$n \Delta u - \frac{d^2 u}{d\nu^2} = (n-1) \Delta_t u,$$

$\Delta_t u$ désignant l'expression de $\Delta_S u$ pour le plan tangent, et

$$\Delta_S u = \Delta_t u + K \frac{du}{d\nu}$$

La formule précédente s'écrit donc

$$(n-1) \int_S^{(n-1)} \Delta_S u \, dS = \int_C^{(n-2)} \frac{du}{d\nu} d\mathcal{Z}.$$

C'est la formule de Green sur une surface.

D'une manière générale, la formule de Green, pour une surface, indique que celle relative à l'espace reste vraie, quand une portion S

de la surface à laquelle on l'applique se déforme, et en particulier est remplacée par une surface parallèle.

On peut étendre ce raisonnement à l'espace fonctionnel, et cela donne une nouvelle démonstration de la formule (9). Il suffit encore d'appliquer la formule (7) au volume V compris entre deux surfaces parallèles et une surface latérale Σ, et de faire varier celle des deux surfaces qui est de l'ordre de grandeur le plus élevé.

Ce procédé de démonstration suggère en même temps une remarque nouvelle. Si l'on applique la formule de Green à une surface S′, et que l'on déforme une portion S de cette surface d'un ordre de grandeur inférieur à celui de S′, la modification considérée n'est pas susceptible d'agir sur les valeurs moyennes de ΔU et $\frac{dU}{d\nu}$, et par suite de modifier la formule de Green; le raisonnement qui précède nous montre que cette formule, écrite sous la forme (7), et où les termes principaux sont de l'ordre de grandeur de l'aire s' de S′, apparaît comme si exacte que les termes d'un ordre de grandeur inférieur varient de quantités égales.

Une aire peut de bien des manières se décomposer en tranches dont les rayons de sphère équivalente ρ varient de zéro à R, et d'épaisseur $f(\rho)d\rho$. L'ordre de grandeur de cette aire apparaît alors comme défini par la valeur, pour n très grand, de

$$(10) \qquad \int_0^R f(\rho)\rho^{n-1}\,d\rho.$$

Jusqu'ici, nous avons assimilé cette quantité à sa valeur principale $f(R)\frac{R^n}{n}$; c'est-à-dire que nous n'avons tenu compte que du contour dont le voisinage constitue une tranche qui l'emporte sur les autres. Mais la remarque qui précède nous suggère qu'il peut y avoir lieu de tenir compte des différents termes de l'expression (10). Les procédés employés jusqu'ici sont trop grossiers; il faut trouver un moyen de grossir les tranches trop petites de manière à leur permettre de figurer dans une moyenne au même titre que les autres. C'est ce qui va se produire dans l'application de la formule de Green au potentiel, application qui va nous conduire à des résultats tout différents de ceux qui précèdent.

111. La formule de Green et le potentiel. — On sait le rôle que

joue, dans l'espace E_n, l'application de la formule de Green au cas où l'une des fonctions qui y figurent est $\frac{1}{r^{n-2}}$, r désignant la distance à un point fixe A. A la limite, pour n infini, $\frac{1}{r^{n-2}}$ devient nul ou infini, et ne conduit pas à une fonctionnelle déterminée, que l'on puisse faire figurer dans la formule (7'). Cela n'empêche pas que la formule de Green, écrite dans les conditions indiquées, conduit à la limite à une formule bien déterminée, mais qui ne sera pas une application de la formule (7').

Plaçons-nous dans le cas d'un point A du volume V_n limité par la surface S_n. Désignons par σ_n la surface de la sphère de rayon 1 dans l'espace E_n, et désignons toujours par Δu non la somme, mais la moyenne des dérivées secondes $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$; comptons la dérivée normale à S positivement vers l'intérieur.

La formule de Green prend la forme connue

$$(11)\qquad u_A = \frac{1}{(n-2)\sigma_n}\int_{S_n}^{(n-1)}\left(u\frac{d}{dv}\frac{1}{r^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}}\frac{du}{dv}\right)dS$$
$$- \frac{n}{(n-2)\sigma_n}\int_{V_n}^{(n)}\frac{\Delta u}{r^{n-2}}\,dV.$$

On remarque aisément que cette formule présente l'aspect que nous attendions; les portions de volume voisines de A sont très petites, si n est grand, mais la multiplication des éléments correspondants par le facteur $\frac{1}{r^{n-2}}$ qui est très grand, conduit à un produit qui reste fini quand n augmente, et l'on est conduit à ce résultat que, dans l'espace fonctionnel, les valeurs de Δu dans les différentes couches concentriques entourant le point A auront une influence sur la valeur de u_A.

Pour faciliter le passage à la limite, transformons l'expression (11) qui comprend trois termes : un potentiel de double couche, un potentiel de simple couche, et un potentiel de volume.

1° *Potentiel de double couche.* — Remarquons que

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)dS = (n-2)\frac{\cos\theta}{r^{n-1}}\,dS = (n-2)\,d\varphi,$$

θ désignant l'angle de la normale en un point M de l'élément dS avec

la droite MA, et $d\varphi$ l'angle solide sous lequel on voit cet élément du point A. Le terme considéré s'écrit donc

$$(12) \qquad \frac{1}{\sigma_n}\int_S^{(n-1)} u\, d\varphi.$$

C'est la moyenne de la fonction u sur la surface S, en accordant à chaque élément de surface un poids égal à l'angle solide sous lequel on le voit du point A. En d'autres termes, c'est la moyenne sur une sphère de centre A sur laquelle on effectuerait la perspective de la surface S. Nous l'appellerons « moyenne de u sur la surface S, vue du point A », et la désignerons par $\mathfrak{M}_A(u)$.

Comme Gateaux l'a remarqué, certe interprétation rend très facile le passage du fini à l'infini. Pour éviter toute difficulté dans ce qui suit, nous considérerons une surface convexe de l'espace fonctionnel; nous reviendrons plus loin sur le cas des surfaces non convexes. Par définition même de la moyenne dans l'espace fonctionnel, la valeur de $\mathfrak{M}_A(U)$, ou moyenne d'une fonctionnelle U sur une surface S, vue de A, est la limite de l'expression analogue dans l'espace E_n, en prenant pour E_n la $n^{\text{ième}}$ section de l'espace fonctionnel, pour S_n la $n^{\text{ième}}$ section de S, et pour u les valeurs de U sur S_n.

2° *Potentiel de simple couche.* — On peut, comme pour le potentiel de double couche, mettre en évidence l'élément $d\varphi$. Ce terme s'écrit alors

$$\frac{1}{n-2}\mathfrak{M}_A\left(\frac{r}{\cos\theta}\frac{du}{d\nu}\right).$$

La fonction dont on prend la moyenne restant finie, ce terme tend vers zéro à la limite. Le potentiel de simple couche disparaît, tandis que le potentiel de double couche a une limite finie.

3° *Potentiel de volume.* — Réunissons tous les éléments de volume intérieurs à un cône de sommet A et d'ouverture très petite $d\varphi$; désignons par ρ la distance au point où l'axe de ce cône perce la surface. L'élément de volume s'écrit $r^{n-1}\,dr\,d\varphi$, et par suite le terme considéré s'écrit

$$-\frac{n}{(n-2)\sigma_n}\int_s^{(n-1)} d\varphi\int_0^\rho r\,\Delta u\,dr = -\frac{n}{n-2}\mathfrak{M}_s\left(\int_0^\rho r\,\Delta u\,dr\right),$$

s désignant une sphère de centre A et de rayon 1, et $\mathfrak{M}_s$ la moyenne sur cette sphère.

Effectuons le passage du fini à l'infini; Δu tend vers ΔU, et cela uniformément, moyennant des conditions très peu restrictives imposées à la fonctionnelle U. Pour le montrer, prenons pour $n^{\text{ième}}$ section celle relative au point de vue du Chapitre III, les axes étant définis par la suite des fonctions trigonométriques rangées dans l'ordre habituel. Supposons par exemple que U ait sa variation seconde normale; il résulte aisément du n° 41 que la convergence de Δu vers ΔU est uniforme pourvu que

$$U''_{x^2(\tau)}, \qquad \int_0^1 \int_0^1 U''^2_{xx_1}\, dt\, dt_1$$

soient inférieurs en module à un nombre déterminé lorsque τ varie dans l'intervalle (0, 1) et que le point représentatif de $x(t)$ décrit le volume V. De même, si la variation $\delta^2 U$ n'est pas normale, il suffit de conditions très peu restrictives pour assurer la convergence uniforme de Δu vers ΔU. Le potentiel de volume s'écrit donc à la limite

$$-\mathfrak{M}_s\left(\int_0^\rho r\,\Delta U\, dr\right),$$

$\mathfrak{M}_s$ et ρ ayant la même signification que dans l'espace E_n.

La formule (11) donne donc à la limite la formule fondamentale

$$U_A = \mathfrak{M}_A(U) - \mathfrak{M}_s\left(\int_0^\rho r\Delta U\, dr\right), \tag{13}$$

et, dans le cas des fonctionnelles harmoniques, on a

$$U_A = \mathfrak{M}_A(U). \tag{14}$$

112. On remarque que, contrairement à ce qui s'est produit pour la formule (7'), la méthode du passage du fini à l'infini suffit comme démonstration de la formule (13). Il n'est d'ailleurs pas difficile de la vérifier directement.

D'après les propriétés connues de la moyenne sur une sphère, ρ est dans presque toutes les directions égal à sa moyenne R, et l'on ne risque pas de rien changer à la formule (13) en remplaçant S par

une sphère de centre A et de rayon R. Il suffit donc de démontrer la formule dans le cas d'une telle sphère.

Soit AM un rayon de la sphère. Tenant compte de la formule (5), et $\Delta_S U$ étant, en chaque point du volume considéré, relatif à la sphère de centre A qui passe en ce point, on a

$$U_A = U_M - \int_0^R \frac{dU}{dr}\,dr = U_M + \int_0^R r\,\Delta_S U\,dr - \int_0^R r\,\Delta U\,dr.$$

Prenons la moyenne de cette expression lorsque M décrit la sphère. On a d'ailleurs, par une interversion de l'ordre des intégrations [1],

$$\mathfrak{M}\left(\int_0^R r\,\Delta_S U\,dr\right) = \int_0^R r\,\mathfrak{M}_r(\Delta_S U)\,dr = 0,$$

$\mathfrak{M}_r$ désignant une moyenne sur la sphère de rayon r; en effet, nous savons que la moyenne de $\Delta_S U$ est nulle pour toute surface fermée. Il vient alors

$$U_A = \mathfrak{M}(U) - \mathfrak{M}\left(\int_0^R r\,\Delta U\,dr\right),$$

formule identique à la formule (13), puisque S est une sphère de rayon R.

113. En prenant pour S une sphère de centre A, nous voyons que *la valeur d'une fonctionnelle harmonique au centre d'une sphère est la moyenne des valeurs qu'elle prend sur la sphère.*

Nous connaissions déjà ce théorème pour les sphères infiniment petites.

Réciproquement, toute fonctionnelle jouissant de la propriété indiquée est harmonique; il suffit en effet, d'après le Chapitre II, que cette propriété soit vraie pour les sphères infiniment petites (en d'autres termes qu'elle soit vraie pour $\delta^2 U$, considéré comme fonctionnelle de δx), pour que U soit harmonique.

114. Revenons au cas d'une surface convexe quelconque. Le problème de Dirichlet consiste, comme dans l'espace E_n, à déter-

---

[1] Cette opération se légitime par un raisonnement tout à fait analogue à celui du n° 116. Il suffit que $\Delta_S U$ soit uniformément continu.

miner une solution de l'équation $\Delta U = F[[x]]$ connaissant sa valeur sur S.

Si ce problème admet une solution, la formule (13) nous montre qu'elle est unique, et nous donne le moyen de la former.

Dans l'espace E_n, on sait qu'on ne peut obtenir ce résultat que par l'introduction de la fonction de Green. Dans l'espace fonctionnel, la disparition du potentiel de simple couche, c'est-à-dire du terme de la formule (11) qui contient la dérivée normale, entraîne cette conséquence que la solution s'obtient d'une manière beaucoup plus élémentaire que dans l'espace E_n.

Il reste à montrer l'existence de la solution. Il suffit à cet effet de vérifier que la formule (13) donne bien la solution du problème. Nous devons dans ce but étudier successivement les deux termes de la formule (13), le potentiel de double couche et le potentiel de volume, et montrer qu'ils vérifient bien les propriétés voulues, tant au point de vue de leurs valeurs sur la surface S que des valeurs de ΔU. L'étude du potentiel de double couche nous permettra d'abord de conclure dans le cas des fonctionnelles harmoniques. Nous étudierons ensuite le potentiel de simple couche, puis le potentiel de volume. L'étude des potentiels de surface, dans le cas de la sphère, a déjà été faite par Gateaux (*Bulletin de la Société mathématique*, 1920).

115. Le potentiel de double couche. — Nous savons que la moyenne d'une fonctionnelle sur une sphère est égale à sa moyenne sur une section de la sphère par un plan contenant le centre. Si A tend vers un point P de la surface, on peut prendre ce plan parallèle au plan tangent en P. La surface étant toujours supposée convexe, sa section par ce plan est tout entière voisine de P, et, si la fonctionnelle U donnée sur la surface est uniformément continue, ses valeurs sur cette section tendent vers U_P. Ces valeurs étant les seules à considérer pour le calcul de la moyenne $\mathfrak{M}_A(U)$, cette moyenne tend vers U_P.

D'autre part, la définition du potentiel s'étend sans peine au cas d'un point extérieur. L'intégrale (12) conserve en effet un sens bien défini. Par un point extérieur A on peut, la surface S étant convexe, faire passer un plan qui n'ait pas de point commun avec elle; le voisinage de l'intersection de ce plan avec une sphère de centre A consti-

tuant, pour n assez grand, presque toute cette sphère, l'angle solide sous lequel on voit la surface S du point A ne constitue qu'une fraction de σ_n qui tend vers zéro. L'intégrale (12) tend donc vers zéro.

Quand on traverse la surface, de l'extérieur à l'intérieur, le potentiel de double couche augmente brusquement d'une quantité égale à la densité. D'ailleurs, au point P de la surface, la perspective de la surface comprend une demi-sphère, concentrée pour n très grand à son intersection avec le plan tangent en A; il en résulte que la valeur du potentiel de double couche en ce point est $\frac{1}{2}U_P$, moyenne arithmétique des valeurs prises de part et d'autre de la surface dans le voisinage de ce point.

116. Il reste à montrer que $\mathfrak{M}_A(U)$ est une fonctionnelle harmonique du point A. Cela est évident à l'extérieur, où ce potentiel est nul. Pour le vérifier à l'intérieur, il suffit de montrer que sa valeur en un point intérieur A est égale à la moyenne des valeurs qu'il prend sur une sphère Σ, de centre A, et de rayon inférieur à la distance de ce point à la surface.

Nous allons utiliser la méthode du passage du fini à l'infini. Désignons par S_n et Σ_n les $n^{\text{ièmes}}$ sections de S et Σ, et, en chaque point M du plan E_n de la $n^{\text{ième}}$ section, par $f_n(M)$ et $f(M)$ les valeurs de $\mathfrak{M}_M(U)$ calculées respectivement dans E_n et dans l'espace fonctionnel. Le théorème à démontrer est vrai dans l'espace E_n, c'est-à-dire que $f_n(A)$ est la moyenne des valeurs de $f_n(M)$ sur la sphère Σ_n. Il s'agit de montrer que $f(A)$, limite de $f_n(A)$, est la moyenne de $f(M)$ sur Σ, c'est-à-dire la limite de la moyenne de $f(M)$ sur Σ_n. Il suffit alors de montrer que $f_n(M)$ tend uniformément vers $f(M)$ sur la sphère Σ.

Soit Q un point de la sphère Σ' de centre M et de rayon 1, intersection avec cette sphère de la demi-droite MP, P étant sur S. Posons

$$U_P = \varphi(M, Q).$$

La fonction $f(M)$ est alors la moyenne de $\varphi(M, Q)$ quand Q décrit la sphère Σ'.

Étant données les hypothèses faites (surface S convexe; point M intérieur et à une distance de S limitée inférieurement), on peut limiter inférieurement le rapport de l'élément d'arc décrit par Q sur une sphère Σ' à l'élément correspondant décrit par P sur S. Par suite,

si U est une fonctionnelle uniformément continue sur S, les fonctionnelles $\varphi(M, Q)$, considérées comme fonctionnelles de Q dont la forme dépend de M, sont également et uniformément continues.

Le raisonnement précédent s'applique bien entendu en prenant la définition de la continuité d'une fonctionnelle liée à la définition habituelle de la distance. Supposons que le résultat soit valable avec d'autres définitions de la continuité, en particulier avec celle qui permettra de démontrer les propositions admises au n° 19. D'après la deuxième de ces propositions, $f_n(M)$ tend bien uniformément vers $f(M)$, et le résultat annoncé est bien obtenu.

Nous reviendrons au n° 145 sur le point qui reste à préciser, dans le raisonnement précédent.

117. Une autre méthode, pour démontrer que $f(A)$ est la moyenne de $f(M)$ sur la sphère Σ, et que par suite le potentiel de double couche est harmonique, consiste à le démontrer d'abord dans le cas où S et Σ sont deux sphères concentriques. La généralisation est immédiate par le raisonnement suivant :

La surface S étant une surface convexe quelconque, M étant fixe, la distance MP, considérée comme fonction du point Q où MP coupe la sphère Σ', a la même valeur $\varphi(M)$ sur presque toute cette sphère. Au point de vue du calcul de la moyenne $f(M)$, la surface S peut donc être remplacée par une sphère de centre C ou de rayon $\varphi(M)$, ou encore par n'importe quelle autre sphère la coupant suivant un grand cercle, par exemple la sphère de centre A et de rayon $\sqrt{\rho^2+\varphi^2}$, ρ désignant la distance MA. D'ailleurs, les valeurs données sur S importent seules, et, s'il est commode de supposer cette fonctionnelle définie en dehors de S, nous pouvons la définir arbitrairement, la continuité étant seulement respectée dans le voisinage de S.

Le point M décrivant la sphère Σ, de centre A et de rayon ρ, $\varphi(M)$ a presque partout une même valeur a, et l'on ne change rien, au point de vue du calcul de la moyenne de $f(M)$ sur cette sphère, en remplaçant $\varphi(M)$ par sa valeur constante a, c'est-à-dire en remplaçant $f(M)$ par la moyenne, vue de M, des valeurs données sur la sphère fixe S' de centre A et de rayon $\sqrt{\rho^2+a^2}$. La moyenne de $f(M)$ est alors égale, le théorème à démontrer étant supposé vrai pour la sphère S', à la moyenne de U sur cette sphère. Comme, par la manière même dont elle est formée, elle ne dépend que des valeurs

de U sur S, c'est que presque toute la sphère S′ est concentrée dans son intersection avec S; cela revient alors au même de prendre la moyenne de U, *vue du point* A, sur S ou S′. Cette dernière étant égale à la moyenne de $f(M)$ sur S′, il en est de même de la première.

C. Q. F. D.

118. Pour compléter ce raisonnement, il faut en justifier le point de départ, c'est-à-dire vérifier notre théorème de la moyenne dans le cas où S et Σ sont deux sphères concentriques. Dans ce cas, $f(M)$ étant la moyenne de U sur le cercle C, la moyenne de $f(M)$ sur Σ dépend linéairement des valeurs de U sur S. « Par raison de symétrie, les valeurs de U sur deux éléments d'aires égaux ont des coefficients égaux. » Il en résulte que cette moyenne est égale, à un facteur constant près, à la moyenne de U sur la sphère S; ce facteur est d'ailleurs égal à l'unité, comme on le voit en faisant $U = 1$. Nous arrivons ainsi au résultat par un raisonnement intuitif. Mais, pour le rendre rigoureux, il faudrait revenir sur la partie de ce raisonnement écrite entre « ... », et chercher à la justifier par le passage du fini à l'infini. On n'échapperait pas, ainsi, à la nécessité de s'appuyer sur les propositions admises n° 19.

On ne peut y échapper qu'en assujettissant les valeurs données de U sur la sphère S, non à vérifier certaines conditions de continuité, mais à être représentable par une série uniformément convergente du type étudié n° 18, chaque terme étant une somme d'intégrales définies. La démonstration consiste alors en un calcul élémentaire, qui n'est autre que celui par lequel on vérifie que la composition de deux lois de probabilité de la forme de Gauss conduit à une loi de la même forme.

Supposons par exemple que

$$U = \int_0^1 \varphi[x(t), t]\, dt.$$

Si $\xi(t)$ et $\eta(t)$ sont deux fonctions de module fonctionnel égal à l'unité, les fonctions $\rho\xi(t)$ et $\rho\xi(t) + a\eta(t)$ sont représentées par les points M et Q du raisonnement précédent. La fonction $f(M)$ est alors la moyenne de

$$U\,|[\rho\,\xi(t) + a\eta(t)]| = \int_0^1 \varphi[\rho\,\xi(t) + a\,\eta(t), t]\, dt$$

à l'intérieur de la sphère

$$\int_0^1 \eta^2(t)\,dt = 1.$$

D'après le n° 18, elle a la valeur

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 dt \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi[\rho\,\xi(t) + a\eta,\, t]\, e^{-\frac{\eta^2}{2}}\, d\eta.$$

La moyenne de $f(M)$, lorsque M décrit la sphère Σ, est alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^1 dt \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\rho\xi - a\eta,\, t)\, e^{-\frac{\xi^2+\eta^2}{2}}\, d\xi\, d\eta$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 dt \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi\sqrt{\rho^2+a^2},\, t)\, e^{-\frac{\xi^2}{2}}\, d\xi,$$

c'est-à-dire la moyenne de U sur la sphère S. La vérification est tout à fait analogue dans le cas des autres intégrales considérées n° 18 (*voir* Gateaux, *Bull. Soc. math.*, 1919).

119. Remarques sur la solution du problème de Dirichlet et les propriétés des surfaces minima. — Les propriétés du potentiel de double couche nous permettent, du moins dans le cas des volumes limités par des surfaces convexes, envisagés jusqu'ici, de conclure à l'existence et à l'unicité de la solution du problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace, comme dans le cas de l'analyse ordinaire. Nous allons voir, en examinant la nature de cette solution, qu'elle jouit de propriétés tout à fait différentes de celle qu'on rencontre dans l'analyse ordinaire.

Nous savons qu'une fonctionnelle harmonique U (nous désignerons maintenant par cette notation la fonctionnelle harmonique obtenue, aussi bien à l'intérieur que sur la surface) est caractérisée par le fait que les surfaces $U = \text{const.}$ sont minima. Une surface Σ, d'équation $U = U_0$ peut donc, comme nous l'avons déjà remarqué au n° 105, être définie comme surface minima, limitée au contour C défini sur la surface S par la même condition $U = U_0$. Le problème de déterminer une surface minima par la connaissance d'un tel contour est, dans l'analyse ordinaire, différent du problème de Dirichlet relatif à l'équation de Laplace. En analyse fonctionnelle, ces deux problèmes

sont équivalents, la détermination des différentes surfaces Σ équivalant évidemment à celle U.

Si l'on remplace les valeurs données de U sur la surface par des valeurs de la forme

$$\varphi(U) = U + \lambda(U - U_0)^2, \qquad (\lambda > 0),$$

la même transformation sur U donne à l'intérieur la solution du nouveau problème posé. Sur la surface $U = U_0$, la valeur de la solution n'est pas modifiée. Il en résulte que, vue d'un point A de cette surface, la surface S paraît concentrée sur le contour C; si en effet il n'en était pas ainsi, la moyenne des valeurs de $\lambda(U - U_0)^2$ sur la surface S, vue de A, serait positive, et la valeur de la solution en A, qui est augmentée de cette moyenne par le changement des données, serait modifiée.

Nous obtenons ainsi une propriété des surfaces minima qui généralise une propriété déjà connue du plan, Si une surface minima Σ, contenant un point A, coupe suivant un contour C une surface fermée S entourant ce point, le contour C, vu du point A, paraît constituer presque toute la surface. La valeur en A d'une fonctionnelle harmonique ayant des valeurs données sur S ne dépendant donc que des valeurs données sur C; on l'obtient toujours par le calcul de la moyenne $M_A(u)$, mais les valeurs de U sur C interviennent seules dans ce calcul.

Considérons en particulier le cas où U est une fonctionnelle linéaire, nulle en A. Désignons par $\mathfrak{P}$ le plan $U = 0$. Les valeurs de U sur S, ou sur C, vues du point A, sont presque partout nulles, puisque $\mathfrak{M}_A(U) = U_A = 0$, et que sur la sphère de centre A, sur laquelle on effectue la perspective de S, une fonctionnelle est presque partout égale à sa moyenne. En d'autres termes, le contour C, vu de A, paraît presque situé dans le plan $\mathfrak{P}$. Vue d'un de ses points, une surface minima paraît *presque un plan*, puisqu'il en est ainsi de tout contour C situé sur cette surface et entourant ce point. Nous généralisons ainsi une propriété des surfaces minima que nous avons déjà établie localement.

Il ne faut pas que les mots « presque un plan », que nous employons pour rendre plus intuitifs les résultats obtenus, en fassent oublier le sens et fassent croire que l'analogie avec un plan est plus complète qu'elle ne l'est en réalité. Lorsque nous disons, dans ce qui précède,

que la surface Σ, vue de A, est presque confondue avec le plan $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}$ représente n'importe quel plan passant par A, et non comme on pourrait le croire le plan tangent à la surface Σ. Pour bien voir le sens de cet énoncé, appliquons-le au cas où la surface Σ elle-même est un plan, soit $\mathfrak{P}'$. L'intersection d'une sphère de centre A et des plans $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$ constitue presque toute la sphère, et par suite presque toute l'intersection de $\mathfrak{P}'$ et de la sphère; en d'autres termes, vue de A, l'intersection de $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$ constitue presque tout l'espace, et par suite presque tout le plan $\mathfrak{P}'$. On peut donc dire que le plan $\mathfrak{P}'$ est presque confondu avec $\mathfrak{P}$, entendant par là que seuls les points de leur intersection comptent pour le calcul de la moyenne d'une fonctionnelle, vue de A, mais non qu'ils font un angle très petit. C'est dans le même sens que nous disons qu'une surface minima est presque un plan.

120. Les remarques qui précèdent permettent de présenter sous un aspect différent la solution du problème : *Trouver une surface minima* Σ *limitée à un contour* C.

Soit C_n la $n^{\text{ième}}$ section de C. Désignons par Σ_n la surface minima de l'espace E_n limitée à C_n. On peut montrer que Σ_n tend vers Σ quand n augmente indéfiniment.

Soit d'autre part Σ'_n la surface lieu des points A d'où le contour C_n paraît diviser l'espace en deux angles solides égaux; un tel point A étant pris comme point de vue, la perspective de C sur une sphère de centre A la divise en deux aires égales, et par suite, si n est assez grand, son voisinage constitue une fraction de plus en plus grande de la sphère; la moyenne d'une fonctionnelle définie sur la sphère ne dépend à la limite que de ses valeurs sur la perspective de C, c'est-à-dire que le contour C, vu de A, constitue presque la surface S. C'est donc que A est sur Σ. La surface Σ'_n tend vers Σ.

Dans l'espace E_n, la détermination de Σ_n est un problème transcendant. Celle de Σ'_n est au contraire un problème élémentaire, dont la résolution dépend du calcul d'une intégrale définie d'ordre $n-1$, qui représente l'angle solide; en l'égalant à $\frac{1}{2}\sigma_n$, on a l'équation de Σ'_n sous forme implicite. A la limite, les surfaces Σ'_n et Σ_n tendent toutes les deux vers Σ. Le problème transcendant se ramène au problème élémentaire.

121. Les problèmes de Cauchy et de Dirichlet pour des variétés quelconques situées sur une surface fermée convexe. — Plaçons-nous encore, pour commencer, dans le cas d'une surface S fermée et convexe. Nous avons vu que si l'on se donne les valeurs de la fonctionnelle harmonique U sur un contour C de cette surface, cela suffit, contrairement à ce qui a lieu dans l'analyse ordinaire, pour la déterminer sur la surface minima Σ limitée à C. Si l'on considère sur S deux contours C et C′ sans points communs, les surfaces minima Σ et Σ' limitées à C et C′ sont aussi sans points communs. On peut, en effet, se donner des valeurs de U sur la surface, qui aient sur C une valeur constante u et sur C′ une valeur constante u' différente de u; on a alors $U = u$ sur Σ et $U = u'$ sur Σ', ce qui prouve que ces surfaces sont sans points communs.

Supposons maintenant que U soit *donné sur une surface ouverte* S_1, constituée par une des portions de S séparées par le contour C. On peut décrire cette surface par des contours C′, partant du contour C et arrivant à se réduire à un point. Les surfaces minima Σ' limitées à ces contours décrivent alors tout le volume compris entre S et la surface Σ limitée à C. Dans ce volume, la fonctionnelle U est bien déterminée. Elle est, au contraire, indéterminée, aussi bien à l'extérieur de S que dans le volume V_1 intérieur à S et situé de l'autre côté de Σ; pour la déterminer dans ce dernier volume, il faudrait se donner ses valeurs sur S de l'autre côté de C.

Nous voyons ainsi que le prolongement de la fonctionnelle U, définie dans V_1, est indéterminé au delà des surfaces S et Σ; il en résulte que les surfaces minima définies dans ce volume ont un prolongement indéterminé à l'extérieur; on peut, en effet, choisir une fonctionnelle harmonique U, définie dans V_1 et ayant sur la surface considérée la valeur constante U_0; il n'y a à l'extérieur de V_1 aucun point où l'on connaisse la valeur de U; il n'y en a par suite aucun qui soit certainement situé aur la surface minima $U = U_0$. Le prolongement de cette surface est indéterminé.

Dans le cas de la surface ouverte S_1, la solution du problème de Dirichlet, comme dans le cas de la surface fermée S, est représentable par le potentiel d'une double couche de densité U étalée sur S_1. Ce potentiel, qui représente dans V_1 la solution cherchée, est nul en dehors de ce volume. Cela est bien évident, ce potentiel pouvant être considéré comme le potentiel d'une double couche étalée sur

toute la surface S, mais dont la densité serait nulle au delà de C; il représente alors une fonctionnelle harmonique ayant les valeurs voulues sur S_1 et par suite dans V_1, et évidemment nulle aussi bien en dehors de S que dans le volume intérieur à S situé de l'autre côté de Σ.

On remarque la discontinuité de ce potentiel. Il est discontinu, non seulement à la traversée de S, comme cela a lieu dans l'analyse ordinaire, mais à la traversée de la surface Σ, qui ne porte aucune masse attirante. Cela tient à la discontinuité de l'angle solide sous lequel on voit S' quand on traverse Σ. Nous avons déjà remarqué que la portion du volume V_1 voisine de Σ peut être décrite par une surface minima Σ_1, qui se déforme en partant de Σ sans que deux de ses positions aient de point commun; on peut de même définir de l'autre côté de Σ des surfaces analogues Σ''. L'intersection avec S de chacune des surfaces Σ, Σ' ou Σ'', vue d'un point de la surface considérée, paraît constituer presque tout l'espace. S'il s'agit d'une surface Σ', cette intersection appartient à S_1, et par suite, vue d'un point de Σ', c'est-à-dire d'un point quelconque de V_1, la surface S_1 paraît constituer presque tout l'espace. Vu d'un point de Σ, c'est son contour C qui paraît constituer presque tout l'espace. Si l'on se place de l'autre côté de Σ, la surface Σ'', qui paraît constituer presque tout l'espace, ne coupe pas S_1, et par suite, l'angle solide sous lequel est vue cette surface ne représente plus qu'une fraction négligeable de l'angle solide total.

Le potentiel de double couche est donc discontinu, d'une part à la traversée de la surface attirante, d'autre part à la traversée des surfaces minima limitées, soit aux contours qui limitent la surface attirante, soit (ce qui revient au même) *aux contours sur lesquels la densité est discontinue.*

122. Considérons le cas où la portion de surface S_1 est très petite. La solution du problème de Dirichlet est alors seulement définie dans un très petit volume V_1 voisin de S_1. Ce problème apparaît alors comme identique au problème de Cauchy.

Nous avons déjà remarqué que, d'après la formule (5), sur une surface non minima S, la dérivée normale première $\frac{dU}{dv}$ intervenant,

mais non la dérivée seconde $\frac{d^2 U}{dv^2}$, le problème de Cauchy se présente comme pour les équations du premier ordre de l'analyse ordinaire. D'autre part, nous venons de voir que le problème de Dirichlet s'étend au cas de surfaces ouvertes. Toute différence entre les deux problèmes a disparu.

Ce problème unique est, par la manière dont il se pose, analogue au problème de Cauchy relatif aux équations aux dérivées partielles du premier ordre. Mais la solution est entièrement différente, surtout par la région où elle est définie. Dans le cas d'une surface fermée S, elle est définie à l'intérieur et indéterminée à l'extérieur; dans le problème considéré de l'analyse ordinaire, elle est définie des deux côtés de la surface, mais n'est en général pas prolongeable, en restant uniforme, dans toute la région intérieure. Dans le cas d'une surface ouverte S_1, la différence est encore plus nette; nous venons de voir que la région où U est définie est limitée par S_1 et une surface minima Σ; or il n'y a aucune analogie entre ces surfaces et les caractéristiques des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

La différence entre les deux problèmes apparaît d'ailleurs dans le calcul des dérivées normales successives. Nous avons remarqué, en effet, à propos de la formule (5), que la valeur de $\frac{dU}{dv}$ déduite de cette formule était relative au côté de la concavité moyenne, et que, de l'autre côté, la dérivée normale pouvait avoir une valeur différente.

123. La surface S étant toujours supposée convexe, considérons sur cette surface une variété $\mathcal{V}$ définie par un nombre fini de conditions d'égalité ou d'inégalité. Les conditions d'inégalité expriment qu'un point quelconque de $\mathcal{V}$ est situé sur une région S_1, limitée par un contour C, simple ou multiple; les conditions d'égalité expriment qu'il est sur l'intersection d'un certain nombre de contours C_1, C_2, ..., C_p. Il est facile de définir la région dans laquelle une fonctionnelle harmonique est déterminée si l'on se donne sa valeur en tous les points de la variété $\mathcal{V}$. C'est la région $\mathcal{R}$ commune au volume V_1 et aux surfaces $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_p$, en désignant par $\Sigma, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_p$ les surfaces minima limitées respectivement aux contours $C, C_1, \ldots, C_p$, et par V_1 le volume compris entre S_1 et Σ.

En effet, la variété $\mathcal{V}$ où la fonctionnelle U est donnée apparte-

nant à S_1, cette fonctionnelle ne peut être déterminée que pour des points du volume V, où elle serait déterminée si ses valeurs étaient données dans toute l'aire S_1. On voit de même qu'elle ne peut être déterminée que pour des points appartenant aussi à chacune des surfaces $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_p$, et par suite à la région $\mathcal{R}$.

Soit inversement A un point de cette région. La fonctionnelle U y a la valeur $\mathfrak{M}_A(U)$, moyenne de U sur la surface S, vue de A. Le point A étant dans V_1, les valeurs de U pour les points de S non situés sur S_1 sont sans influence sur le calcul de la moyenne; A étant sur Σ_1, il en est de même des points n'appartenant pas à C_1; il en est de même aussi de ceux n'appartenant pas à $C_2, \ldots$, ou C_p. Les valeurs de U, données pour les points de la variété $\mathcal{V}$, suffisent donc à déterminer $U_A = \mathfrak{M}_A(U)$.

Cela revient à dire que, vu de A, le voisinage de la variété $\mathcal{V}$ paraît constituer presque toute la surface S, ou que la perspective $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{V}$ sur une sphère de centre A constitue presque toute cette sphère. Cela revient alors au même de prendre la moyenne sur $\mathcal{V}'$ ou sur cette sphère. Par analogie avec le théorème du n° 57, ramenant la moyenne dans un volume à une moyenne sur la surface qui le limite, on peut en effet montrer que la moyenne sur la sphère se ramène à une moyenne dans $\mathcal{V}'$, calculée en donnant à des éléments de mesures égales des poids proportionnels à des nombres finis, mais non nécessairement égaux. Comme la fonctionnelle considérée a la même valeur sur presque toute la sphère, et par suite sur presque toute la variété $\mathcal{V}'$, le fait que ces poids ne soient pas égaux est sans influence sur la moyenne; il faudrait que leurs rapports soient de la forme a^ω (ou $a^{\omega-p-1}$, $a \neq 1$) pour que cela modifie la moyenne. On peut donc dire que U_A, pour un point A de la région $\mathcal{R}$, est la moyenne des valeurs données sur la variété $\mathcal{V}$, vue de A. Cette moyenne est un potentiel de double couche généralisé.

Il est d'ailleurs peut-être préférable de considérer la double couche comme étalée sur S, mais de densité nulle en dehors de $\mathcal{V}$. Le potentiel de double couche qui en résulte a alors les valeurs voulues dans $\mathcal{R}$, et est nul en dehors de cette région. Cette circonstance généralise mieux ce qui se produit si $\mathcal{V}$ est une portion S_1 de la surface S, $\mathcal{R}$ étant alors le volume V_1.

Dans le cas général, on peut définir la région $\mathcal{R}$ de la manière suivante : la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point A

soit extérieur à $\mathcal{R}$ est qu'on puisse trouver une surface minima contenant ce point et sans point commun avec $\mathcal{V}$.

Si en effet un point A est dans la région $\mathcal{R}$, n'importe quelle surface minima contenant ce point coupe S suivant un contour Γ qui, vu de A, constitue presque toute cette surface. Comme la variété $\mathcal{V}$, vue de A, constitue aussi presque toute cette surface, non seulement le contour Γ et la variété $\mathcal{V}$ ont des points communs, mais ces points, vus de A, constituent presque toute la surface S. On ne peut donc pas faire passer par A une surface minima sans point commun avec $\mathcal{V}$.

Supposons au contraire le point A non situé dans la région $\mathcal{R}$. Si, par exemple, il est situé en dehors de V_1, on peut faire passer par ce point une surface minima tout entière du même côté de Σ, et par suite sans point commun avec $\mathcal{V}$. Il suffit, par exemple, de définir à l'intérieur de S une fonctionnelle harmonique U par la condition de prendre sur S des valeurs, constantes sur l'aire S_1 et sur son contour C, et croissant quand on s'éloigne de S_1; la surface $U = \text{const.}$, qui passe par le point A, est alors une surface minima sans point commun avec Σ. Dans tous les autres cas où A n'est pas dans la région $\mathcal{R}$, on voit de même qu'on peut faire passer par ce point une surface minima sans point commun avec l'une des surfaces Σ_1, $\Sigma_2, \ldots, \Sigma_p$, et par suite avec $\mathcal{V}$. Le résultat énoncé est donc bien établi.

Dans ce qui précède, nous avons supposé p fini. L'extension de ces résultats est possible dans certains cas où p devient infini; nous reviendrons sur cette question au n° 127.

124. Cas de surfaces non convexes. — Soit un point M d'une surface S, où la courbure moyenne ait une valeur non nulle K; supposons l'équation de cette surface de la forme $\Phi = 0$, Φ étant une fonctionnelle admettant en M des variations première et seconde au sens de M. Fréchet (avec notre définition habituelle de la distance r).

Dans le voisinage du point M, on peut définir une surface minima Σ_0 par la condition que la courbure de sa section normale tangente à n'importe quelle direction du plan tangent soit égale à la courbure de la section correspondante de la surface S, diminuée de K. Cette surface est située tout entière du même côté de S.

Soit Σ une surface minima très voisine de Σ_0 et située tout entière

par rapport à elle du côté de la concavité moyenne (elle pourra, par exemple, être déduite de Σ_0 par une translation parallèle à la normale en M). Elle coupe S suivant un contour fermé C, qui entoure complètement le point A où elle coupe la normale en M (dans l'exemple indiqué, C différera très peu de l'intersection de Σ avec une sphère de centre A). La donnée d'une fonctionnelle harmonique, sur S et dans le voisinage de M, suffit donc pour la déterminer en A et sur toute la portion de Σ limitée à C, et par suite en n'importe quel point, voisin de M, situé du côté de la concavité moyenne.

Au contraire, par un point situé du côté opposé, on peut faire passer une surface minima ne coupant pas S, du moins dans le voisinage de M, et la fonctionnelle est indéterminée en ce point.

Ces remarques vont nous permettre de généraliser les résultats précédents aux cas de surfaces non convexes.

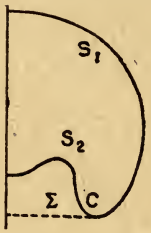
125. Soit d'abord une surface fermée S sur laquelle K conserve un signe constant (nécessairement positif si la normale est comptée positivement vers l'intérieur). On peut dire qu'elle est *convexe en moyenne*, ou qu'en chaque point il existe une surface minima tangente qui la laisse tout entière du même côté.

Il n'y a dans ce cas rien à changer aux résultats développés dans le cas des surfaces fermées convexes. Les surfaces minima limitées aux contours $U =$ const. sont deux à deux sans point commun, et la fonctionnelle U est bien définie sur chacune d'elles. Le potentiel de double couche, qui représente la solution à l'intérieur, est nul à l'extérieur.

126. Soit maintenant une surface fermée S sur laquelle K n'ait pas un signe constant. En un point M, où K est négatif, on peut définir une surface minima Σ, tangente à S en ce point et intérieure à S dans le voisinage de ce point. Elle recoupe évidemment S suivant un contour C, entourant complètement M. La valeur de la fonctionnelle harmonique U en M est déterminée par ses valeurs sur C, et la donnée de U en M est surabondante. Les points de S où il est inutile de se donner U comprennent alors tous les points où K est négatif, mais peuvent comprendre certains points où K est positif [par exemple, dans le cas d'une surface de révolution ayant l'axe et la méridienne figurés ci-après (*fig.* 4)].

Désignons par S_1 la portion de S où il est nécessaire de se donner U, et par S_2 le reste de la surface. Ces deux régions sont séparées par un contour C sur lequel $K = 0$ (ou plusieurs contours analogues). Soit Σ la surface minima limitée à C (un plan, dans le

Fig. 4.



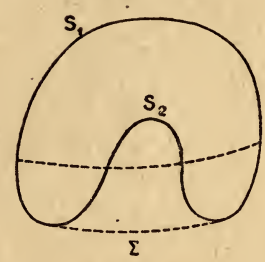
cas de la figure). Elle touche S suivant le contour C; en effet, ce contour, étant situé sur une surface minima, et étant fermé, ne peut avoir qu'exceptionnellement sa courbure moyenne nulle; les deux surfaces S et Σ, qui contiennent ce contour et ont leur courbure moyenne nulle, ont alors pour plan tangent le plan osculateur moyen de ce contour (d'après le théorème de Meusnier).

Si la fonctionnelle harmonique U est donnée sur la surface ouverte S_1, elle est évidemment bien déterminée dans tout le volume compris entre S_1 et Σ. Le potentiel de double couche, qui définit la solution dans ce volume, est nul dehors, et par suite discontinu à la traversée de S_1 et Σ.

Supposons maintenant U donné sur toute la surface S, ses valeurs étant compatibles, c'est-à-dire que les valeurs données sur S_2 sont déterminées par les autres comme il vient d'être dit, et cherchons ce que représente le potentiel de double couche de densité U sur toute la surface S. Pour simplifier, supposons K négatif sur toute la région S_2 (*fig.* 5). Le volume V_1 compris entre S_1 et Σ et le volume V_2 compris entre S_2 et Σ sont tous les deux convexes en moyenne, et, de même qu'à l'intérieur du premier la solution est représentée par U_1, potentiel de double couche étalé sur S, à l'intérieur du second elle est représentée par U_2 potentiel de double couche étalée sur S_2. Le signe du potentiel de double couche dépendant du sens positif de la normale, ce dernier terme change de signe si, au lieu de considérer la surface S_2 comme limitant V_2, on la considère comme limitant le volume V intérieur à S. Le potentiel de

double couche de densité U sur toute la surface S a donc la valeur $U_1 - U_2$. Comme dans le cas d'une surface convexe, il représente U à l'intérieur et zéro à l'extérieur (aussi bien dans V_2 qu'en dehors de ce volume).

Fig. 5.



On remarque qu'il est continu à la traversée de Σ. On aurait pu se demander si une surface telle que Σ, « surface minima bouchant les trous d'une surface S », ne pourrait pas être une surface de discontinuité pour le potentiel de double couche. Il n'en est rien, et l'on ne trouve comme surfaces de discontinuité que celles déjà signalées, c'est-à-dire les surfaces attirantes, et les surfaces minima limitées, soit aux contours de surfaces attirantes, soit aux contours sur lesquels la densité est discontinue.

127. La notion de variété minima; conclusion relative au problème de la détermination d'une fonctionnelle harmonique par ses valeurs sur une variété quelconque. — Les remarques du n° **123** relatives aux variétés situées sur une surface convexe s'étendent aisément au cas de variétés qui ne sont situées sur aucune surface convexe. Elles s'étendent aussi aux cas de variétés définies par une infinité de conditions d'égalité ou d'inégalité. Pour pouvoir énoncer les conclusions sous une forme générale, nous allons introduire la notion de variété minima. Nous dirons qu'*une variété σ est minima si toute surface la contenant a sa courbure moyenne nulle en chaque point de σ.* Ainsi le contour, intersection de deux surfaces minima non tangentes, a sa courbure moyenne nulle, et est une variété minima. Il en est de même de l'intersection de p surfaces minima si, pour les points de cette intersection, sauf peut-être certains points particuliers, les plans tangents à ces p surfaces ont des équations indépendantes.

Pour qu'une variété σ soit minima, il est nécessaire et suffisant que :

1° Elle soit assez étendue;

2° Elle ait sa courbure moyenne partout nulle.

Précisons d'abord le sens de la première condition. En un point M de σ, choisissons un système complet d'axes orthogonaux qui soient tous tangents ou normaux à σ. Il faut qu'ils soient *presque tous* tangents, au sens du Chapitre III, c'est-à-dire que, si on les range dans un ordre normal, la fréquence de ceux qui sont normaux à σ tende vers zéro. Cette condition sera sûrement remplie si la variété σ est définie par un nombre fini de conditions.

La moyenne d'une fonctionnelle du second degré, sur une sphère de centre M, est la moyenne des valeurs qu'elle prend aux extrémités des axes considérés. La condition précédente exprime donc qu'il suffit de considérer ceux tangents à Σ, et que par suite la moyenne dans la sphère considérée de l'espace fonctionnel est égale à sa moyenne dans sa section par le plan tangent à σ. Cette section constitue presque toute la sphère. En particulier, la courbure moyenne d'une surface S contenant σ est la moyenne des courbures de ses sections normales tangentes à la variété σ.

Supposons alors la courbure moyenne de σ nulle au point M. Pour presque toutes les directions tangentes à σ, on peut tracer sur σ une ligne tangente à la direction considérée et dont la courbure soit nulle. D'après le théorème de Meusnier, la section normale de S tangente à cette direction a *a fortiori* sa courbure nulle, et par suite cette surface a sa courbure moyenne nulle.

Si d'ailleurs l'une des conditions précédentes n'était pas réalisée, on pourrait aisément définir une surface contenant σ et dont la courbure moyenne ne soit pas nulle. Ces deux conditions sont donc bien nécessaires et suffisantes pour que la variété σ soit minima.

La deuxième condition équivaut à dire que la variété σ peut être définie comme intersection de surfaces minima dont les plans tangents soient indépendants, c'est-à-dire qu'aucune de ces surfaces n'est tangente (sauf peut-être en des points particuliers) à l'intersection des autres.

Si l'on considère, sur une variété σ, une variété définie par une condition d'égalité, sa courbure moyenne est évidemment égale à sa

courbure géodésique moyenne. Si elle est nulle, c'est-à-dire si cette variété est une *géodésique* de σ, c'est une variété minima à une dimension de moins que σ. Elle peut être définie comme intersection de σ et d'une surface minima non tangente à σ. Réciproquement, une telle intersection est une géodésique de σ.

On peut, au sujet de ces variétés, se proposer de déterminer une variété minima σ limitée à une variété non minima $\mathcal{V}$. La solution est la suivante : σ est le lieu des points A tels que la perspective de $\mathcal{V}$, vue de A, sur une sphère de centre A (ou du moins le voisinage de cette perspective), constitue presque toute cette sphère.

Si la variété $\mathcal{V}$ n'est pas assez étendue, la variété σ ne comprend aucun point.

On peut alors énoncer de la manière suivante les résultats relatifs au problème de la détermination d'une fonctionnelle harmonique U par la donnée de ses valeurs sur une variété $\mathcal{V}$:

1° La région où U est déterminé est la variété minima σ limitée à $\mathcal{V}$.

2° Le contour de σ comprend des portions de $\mathcal{V}$; il peut comprendre en outre des géodésiques de σ, qui sont elles-mêmes des variétés minima sur le contour desquels on peut faire des remarques analogues.

Si $\mathcal{V}$ comprend, soit des portions de telles géodésiques, soit des points n'appartenant pas au contour de σ, la donnée de U pour ces points est surabondante.

3° Soit $\mathcal{V}'$ une variété définie sur $\mathcal{V}$ par la condition $U = u$; la variété minima limitée à $\mathcal{V}'$ constitue dans σ le lieu des points pour lesquels $U = u$.

On peut rendre ces résultats intuitifs en concevant qu'une variété minima puisse être matérialisée par une nappe d'un liquide visqueux, comme une surface minima de l'espace ordinaire. La portion d'une telle variété que l'on doit concevoir comme pouvant être ainsi matérialisée doit être limitée par un contour convexe, c'est-à-dire qu'en aucun point sa courbure géodésique moyenne n'est dirigée vers l'extérieur. Concevons de plus qu'une telle nappe puisse exister si elle est maintenue sur les parties de son contour non constituées par des géodésiques. La région σ considérée ci-dessus est alors constituée par la nappe pouvant être maintenue par la variété $\mathcal{V}$.

Si $\mathcal{V}$ est une surface, σ est une portion de volume. Si, pour faciliter

la représentation des nappes considérées, par analogie avec l'espace ordinaire, on admet qu'elles peuvent au plus constituer des surfaces, il faut alors concevoir le volume où U est défini comme limité par la surface $\mathcal{V}$ et par des nappes de liquide visqueux bouchant les trous de cette surface.

128. **Cas des variétés minima.** — Les variétés minima jouent dans ce qui précède un rôle particulier. Une fonctionnelle harmonique est harmonique sur une telle variété, c'est-à-dire que $\Delta U = \Delta_\sigma U$, $\Delta_\sigma U$ étant défini comme $\Delta_S U$ dans le cas d'une surface. U est alors défini sur σ si l'on se donne ses valeurs sur le contour de cette variété, comme cela a lieu dans le cas des surfaces minima.

Pour faciliter le langage, plaçons-nous dans le cas d'une surface minima finie Σ.

Étudions d'abord le potentiel de double couche de densité U étalée sur Σ. Il est nul dans tout l'espace. Des deux côtés de Σ, cela résulte évidemment de la possibilité de faire passer par chaque point de cette région une surface minima ne contenant pas Σ. (Si la surface Σ était illimitée, si par exemple elle était constituée par un plan indéfini, elle serait vue d'un des points considérés sous un angle égal à la moitié de l'angle solide total; le potentiel de double couche serait alors égal à la moitié de la moyenne des valeurs de U à l'infini.)

Pour un point A de Σ, on peut montrer que, sur un contour C entourant ce point, vu de A, l'angle du plan tangent à Σ avec le rayon venant de M est presque partout nul. La surface Σ est alors vue *tellement en raccourci* que sa perspective sur une sphère de centre A est presque partout sans épaisseur. Bien que le voisinage de cette perspective constitue presque toute cette sphère, la surface Σ est donc vue de A sous un angle solide nul, et le potentiel de double couche est nul [1].

129. Une autre question se pose, au point de vue de la détermination de U dans le voisinage de Σ, d'un côté déterminé de cette

---

[1] Il n'en est pas de même du potentiel de simple couche. Le potentiel de simple couche sur une variété minima, en particulier sur un plan à $\omega - 1$ dimensions, est dans cette variété analogue à ce qu'est dans l'espace le potentiel de volume, que nous étudierons plus loin; il vérifie l'équation de Poisson, Δ étant seulement remplacé par Δ_σ. En dehors de cette variété, il est nul.

surface. La valeur initiale de U est harmonique sur Σ, c'est-à-dire que $\Delta_\Sigma U = 0$. Quelles sont les conditions imposées aux dérivées normales successives ?

Partons de l'expression qui donne la variation de la valeur de $\frac{d^2 U}{ds^2}$ relative à une direction principale, quand on remplace Σ par une surface parallèle infiniment voisine. On a

$$\delta \frac{d^2 U}{ds^2} = \frac{d^2 \delta U}{ds^2} - 2 \frac{d^2 U}{ds^2} \frac{\delta\, ds}{ds} = \frac{d^2 \delta U}{ds^2} + 2k \frac{d^2 U}{ds^2} \delta n,$$

ou, en prenant la moyenne pour toutes les directions principales, rangées dans un ordre normal,

$$\delta \Delta_\Sigma U = \Delta_\Sigma \delta U + 2 \delta n \, \mathfrak{M} \left(k \frac{d^2 U}{ds^2} \right),$$

et, d'après la formule (5),

$$(15) \qquad \delta \Delta U = \Delta_\Sigma \delta U + 2 \delta n \, \mathfrak{M} \left(k \frac{d^2 U}{ds^2} \right) - K \frac{d^2 U}{dn^2} \delta n - \delta K \frac{dU}{dn}.$$

Deux cas sont alors à distinguer pour les surfaces minima.

Premier cas. — Surfaces minima pour lesquelles presque tous les rayons de courbure deviennent infinis; δK est alors nul (*voir* n° 87), et la formule (15) s'écrit

$$(16) \qquad \delta \Delta U = \Delta_\Sigma \delta U,$$

de sorte que la condition à imposer à $\frac{dU}{dn}$, pour que ΔU reste nul, est que cette dérivée soit harmonique sur Σ. De même toutes les dérivées normales successives sont harmoniques sur Σ.

Deuxième cas. — Surfaces minima pour lesquelles presque tous les rayons de courbure ne deviennent pas infinis.

Il existe d'autres termes dans la formule à écrire, qui prend la forme

$$\Delta_\Sigma \frac{dU}{dn} + a \frac{dU}{dn} + b = 0,$$

a et b étant des fonctionnelles déterminées sur Σ. D'après le n° 102, on peut raisonner sur les équations de ce type comme si Δ ou Δ_Σ étaient des dérivées ordinaires. Cette équation s'intègre alors comme

une équation différentielle ordinaire du premier ordre [1]. La solution est de la forme

$$\alpha u + \beta,$$

α et β étant des fonctionnelles déterminées, et u une fonctionnelle harmonique sur Σ.

Les mêmes circonstances se reproduisent pour le calcul des dérivées normales successives.

130. Revenons sur le premier cas, et supposons que la valeur de U sur la surface Σ soit constante. Cherchons quelle est la condition pour qu'une surface Σ' voisine de Σ, la distance de Σ' à Σ ayant en chaque point une valeur δ_n, soit minima. Il est à cet effet nécessaire et suffisant qu'une fonctionnelle, égale sur Σ à une constante u et sur Σ' à une constante $u + \delta u$, soit harmonique sur Σ', c'est-à-dire d'après le numéro précédent, que $\frac{\delta u}{\delta n}$ soit harmonique sur Σ. Or, d'après le n° 100, $\frac{\delta u}{\delta n}$ et $\frac{\delta n}{\delta u}$ sont harmoniques en même temps. La condition nécessaire et suffisante pour que Σ' soit minima est que δn soit harmonique sur Σ.

Ce résultat s'étend au cas où la surface Σ' n'est pas infiniment voisine de Σ. Si, en chaque point M de Σ, on porte sur la normale une longueur $MM' = f(M)$, la condition nécessaire et suffisante pour que la surface lieu du point M' soit minima, est que $f(M)$ soit harmonique sur Σ. Cet énoncé, comme celui relatif au cas où la surface Σ' est très voisine de Σ, ne s'applique bien entendu que si Σ appartient à la première des catégories de surfaces minima distinguées au n° 87 et au n° 129.

Il s'applique en particulier si Σ est un plan. Désignons par a_1, a_2, ..., a_n, ... un système de coordonnées rectangulaires, rangées dans un ordre normal; prenons pour Σ le plan $a_1 = 0$. Nous voyons que la condition nécessaire et suffisante pour que la surface

$$a_1 = f(a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$$

---

[1] L'opération de quadrature est seulement remplacée par la résolution de l'équation $\Delta_\Sigma U = \Phi$, qui s'exprime par un potentiel de simple couche (d'après la note précédente). On généralise de même aisément la théorie des équations ou systèmes d'équations linéaires d'ordres quelconques.

soit minima est que la fonction f soit harmonique. C'est un résultat déjà connu; cela revient en effet au même de dire que f est une fonction harmonique de $a_2, \ldots, a_n, \ldots$, ou que $f - a_1$ est une fonction harmonique de $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$; cela donc revient aussi au même que de dire que les surfaces $f - a_1 =$ const. (déduites de l'une d'elles par une translation), sont minima.

131. Le potentiel de simple couche. — Pour montrer les analogies et les différences entre le potentiel de simple couche et le potentiel de double couche, il nous suffira de nous placer dans le cas d'une surface S fermée et convexe, ou du moins à courbure moyenne toujours dirigée vers l'intérieur.

Soit, dans l'espace E_n, un potentiel de simple couche, de densité μ. Si on le multiplie par le facteur $\frac{1}{(n-2)\sigma_n}$ introduit à propos du potentiel de double couche, nous avons vu au n° 111 que le produit tend vers zéro quand n augmente indéfiniment. Si au contraire on le multiplie seulement par $\frac{1}{\sigma_n}$, il prend, d'après le n° 111, la valeur

$$U_A = \mathfrak{M}_A\left(\mu \frac{r}{\cos\theta}\right), \tag{17}$$

qui a un sens bien déterminé, et reste finie, pour n infini; c'est cette valeur que nous appellerons « potentiel de simple couche de densité μ ». C'est un potentiel de double couche de densité $\mu \frac{r}{\cos\theta}$. En chaque point A, cette remarque en définit bien la valeur, mais comme cette densité est fonction de A, il est nécessaire de préciser les propriétés qui résultent de cette définition.

En premier lieu le potentiel de simple couche est évidemment nul, comme le potentiel de double couche, à l'extérieur de S.

Considérons maintenant un point A, situé sur la normale en un point M de la surface, du côté intérieur, à une distance très petite h. Par ce point, faisons passer une surface minima Σ, normale à AM, et telle que la courbure normale relative à chaque direction ait la valeur $k - K$, k étant la courbure normale de la surface S en M relative à la même direction, et K la courbure moyenne de la surface S en M (cette surface Σ a déjà été considérée n° 125). Vue du point A, la surface S paraît concentrée dans le voisinage de son inter-

section C avec Σ. Or sur le contour C, vu de A, $\frac{r}{\cos\theta}$ a presque partout une même valeur, qui tend vers $R = \frac{1}{K}$ quand h tend vers zéro; μ a de même presque partout une même valeur qui tend vers μ_P. Donc le potentiel de simple couche prend en A une valeur qui tend vers $R\mu_P$ quand h tend vers zéro. Il se comporte, au point de vue des valeurs à l'extérieur et des valeurs sur la surface, comme un potentiel de double couche de densité μR, R étant le rayon de courbure moyenne.

Ce résultat nous met sur la voie du théorème suivant, déjà établi par Gateaux dans le cas de la sphère : *Le potentiel de simple couche de densité μ est égal au potentiel de double couche de densité μR.*

Pour le démontrer, on peut employer deux procédés :

1° Il suffit, étant donnés les résultats déjà obtenus, de démontrer que le potentiel de simple couche est harmonique. On peut le démontrer en reproduisant les raisonnements des n^{os} **116** et **117**, qui s'étendent sans difficulté au potentiel de simple couche, pourvu que l'on suppose R uniformément continu.

2° On peut le vérifier directement.

La distance r d'un point quelconque M de la surface S au point intérieur A, la surface étant vue de ce dernier point, a presque partout une même valeur ρ. L'intersection C de S et de la sphère de centre A et de rayon ρ, constituant presque toute cette sphère, a sa courbure géodésique moyenne presque partout nulle, c'est-à-dire qu'en presque tous les points le plan osculateur moyen de C est normal à la sphère. Pour les points où il en est ainsi, on a, d'après le théorème de Meusnier,

$$\mu \frac{\rho}{\cos\theta} = \mu \frac{r}{\cos\theta} = \mu R,$$

et, comme ces points, vu de A, constituent presque toute la surface

$$U_A = \mathfrak{M}_A\left(\mu \frac{r}{\cos\theta}\right) = \mathfrak{M}_A(\mu R), \tag{18}$$

ce qui démontre le résultat énoncé [1].

---

[1] Si le point A est variable, la seconde expression est évidemment préférable à la première. S'il est fixe, il peut être indiqué d'employer la première qui ne fait pas intervenir le rayon de courbure moyenne de la surface, mais seulement le plan tangent.

132. Le potentiel de volume. — Considérons, dans l'espace E_n, le potentiel U_n dû à des masses de densité $\frac{\mu}{\sigma_n}$ réparties dans un volume V_n. Le volume V_n peut être considéré comme décrit par des surfaces S_n dépendant d'un paramètre λ qui varie de α à β. Définissons la déformation de la surface S_n, quand λ augmente de $d\lambda$, par la donnée du déplacement normal de chaque point, $\delta n = \frac{\partial n}{\partial \lambda} d\lambda$. Désignons par u_n le potentiel dû à une simple couche de densité $\frac{\mu}{\sigma_n} \frac{\partial n}{\partial \lambda}$ établie sur la surface S_n. On a

$$U_n = \int_\alpha^\beta u_n \, d\lambda. \tag{19}$$

Supposons que n augmente indéfiniment, V_n et S_n désignant les $n^{\text{ièmes}}$ sections d'un volume V et d'une surface S de l'espace fonctionnel. Pour que la formule (19) reste vraie à la limite, il suffit que u_n tende uniformément vers sa limite u. Le potentiel u se ramenant par la formule (17) à un potentiel de double couche, cette convergence uniforme s'établit par le même raisonnement qu'au n° 116, moyennant certaines hypothèses assez peu restrictives sur la continuité de μ et le choix des surfaces S : il faut que μ et $\frac{\partial n}{\partial \lambda}$ soient continus au sens du n° 116; il faut éviter que presque tout le volume V, vu de A, paraisse concentré sur une seule surface S, comme ce serait le cas si l'une de ces surfaces était une surface minima contenant A. On évite sûrement toute difficulté en prenant pour surfaces S des sphères de centre A, ou bien des sphères ayant pour centre un point différent B, si la sphère de centre B passant par A ne contient aucune masse attirante.

Le potentiel U de densité μ dans le volume V étant par définition la limite de U_n pour n infini, nous avons alors la formule

$$U = \int_{\lambda'}^{\lambda''} u \, d\lambda. \tag{20}$$

Supposons en particulier qu'on prenne pour surfaces S des sphères de centre A. Désignons par R le maximum de la distance à A d'un point du volume V, et par $\mathfrak{M}_r(\mu)$ la moyenne de la densité sur la sphère de rayon r; il vient

$$U = \int_0^R \mathfrak{M}_r(\mu) \, r \, dr. \tag{21}$$

On peut intervertir l'ordre des deux intégrations, c'est-à-dire écrire

$$(22) \qquad U = \mathfrak{M}\left(\int_0^R \mu r\, dr\right),$$

l'intégrale étant prise le long de chaque demi-droite partant de A, et $\mathfrak{M}(\cdot\cdot)$ désignant la moyenne des valeurs obtenues. Cette formule s'établit sans difficulté en écrivant la formule analogue dans l'espace E_n, et passant à la limite. Dans cette formule, on peut remplacer les limites d'intégration par r' et r'', distances à A des points où chaque demi-droite partant de A entre ou sort dans le volume V, ce qui donne

$$(23) \qquad U = \mathfrak{M}\left(\int_{r'}^{r''} \mu r\, dr\right),$$

si A est dans le volume V, et l'on retrouve l'expression utilisée formule (13).

Enfin, une fonctionnelle définie sur une sphère étant presque partout égale à sa moyenne, on peut remplacer r' et r'' par leurs moyennes ρ' et ρ'', et écrire

$$(24) \qquad U = \mathfrak{M}\left(\int_{\rho'}^{\rho''} \mu r\, dr\right) = \int_{\rho'}^{\rho''} \mathfrak{M}_r(\mu) r\, dr.$$

133. De ces formules, de la dernière par exemple, résultent immédiatement les propriétés suivantes :

1° *Le potentiel* U *est nul en tout point par lequel on peut faire passer une surface minima ne coupant pas le volume* V.

En effet, chacun des potentiels de surfaces dont il est la somme est nul dans ces conditions.

La région où U est nul est alors la même que s'il s'agissait d'un potentiel dû à des masses réparties sur la surface qui limite le volume V. Celle où U n'est pas nul comprend le volume V; de plus, si ce volume est limité par une surface composée de plusieurs nappes (nappe extérieure S, nappes intérieures S′, S″, ...), ou si la nappe extérieure comprend des régions S_1, S_2, ..., où la courbure moyenne est dirigée vers l'extérieur, la région où U n'est pas nul comprend les volumes intérieurs aux surfaces S′, S″, ..., et ceux

compris entre les portions de surfaces S_i et les surfaces minima Σ_i limitées à leur contour.

2° *Dans toutes les régions où il n'y a pas de masses attirantes, le potentiel est harmonique.*

Pour le démontrer, il suffit de montrer que sa valeur au centre d'une sphère est égale à la moyenne de ses valeurs sur la surface de la sphère, s'il n'y a pas de masses à son intérieur. Cette propriété résulte aisément de ce qu'elle est vraie pour chacun des potentiels de surfaces dont U est la somme.

134. Étudions maintenant le potentiel au point de vue de la continuité.

Remarquons d'abord qu'au centre d'une sphère de rayon ρ le potentiel dû à des masses de densité inférieure en valeur absolue à un nombre donné μ' réparties à l'intérieur de cette sphère, est inférieur à $\mu'\frac{\rho^2}{2}$. Il tend vers o avec ρ. De cette circonstance résulte la continuité du potentiel à l'intérieur des masses attirantes; le raisonnement est exactement le même que dans la théorie ordinaire du potentiel; il repose sur la *convergence uniforme* de l'intégrale qui définit le potentiel.

Il y a toutefois une différence, provenant de ce que nous n'avons pas démontré que le potentiel est continu en tout point n'appartenant pas au volume V. Ce résultat n'est pas exact. On peut alors seulement énoncer le résultat suivant : *Si le potentiel est discontinu en un point* A, *cette discontinuité n'a pas une cause locale; elle subsiste certainement si l'on supprime les masses situées dans une sphère de centre* A *et de rayon suffisamment petit.*

Ce résultat s'applique en particulier si le point A est situé sur une surface où la densité est discontinue, par exemple sur la surface S qui limite le volume V. Mais en ces points la dérivée normale est discontinue. Pour nous en rendre compte, considérons un point A, où le rayon de courbure moyenne de S ait une valeur $\mathcal{R}$, et soit dirigé vers l'intérieur. Prenons sur la normale en A à la surface S, du côté intérieur, un point B situé à une distance h du point A. Un plan normal à AB passant par B coupe la surface S à une distance équivalente dans presque toutes les directions à $\sqrt{2\mathcal{R}h}$. Le potentiel en B est

alors équivalent à un potentiel de densité μ_A dans une sphère de centre B et de rayon $\sqrt{2\mathfrak{R}h}$, c'est-à-dire à $\mu_A\mathfrak{R}h$. La dérivée normale, comptée positivement vers l'intérieur, augmente donc brusquement, quand on passe de l'extérieur à l'intérieur, de o à $\mu_A\mathfrak{R}$. (Dans l'espace ordinaire, on sait que la dérivée du potentiel de volume est continue dans ces conditions.)

Considérons maintenant un point A de la surface S, dans le voisinage de laquelle cette surface soit minima. Soit C le contour de la portion Σ de cette surface qui est minima. Dans presque toutes les directions, la distance des points de C au point A a une même valeur ρ. Supposons pour fixer les idées qu'au delà de C la courbure moyenne de S soit dirigée vers l'intérieur, de sorte que la surface Σ peut être prolongée de manière à ne pas couper le volume V. En un point voisin de A extérieur à V, le potentiel est nul, tandis qu'en un point intérieur voisin de A il a la valeur

$$\int_0^\rho \mathfrak{M}_r(\mu)\, r\, dr.$$

Il est donc discontinu. Il est de même discontinu toutes les fois que la densité est discontinue sur une surface minima.

Ceci n'est pas en contradiction avec le fait que la discontinuité ne peut pas avoir une cause locale. On peut modifier la densité à l'intérieur d'une sphère de centre A et de rayon $\rho' < \rho$, de manière à la rendre continue. La discontinuité subsistera, mais n'aura plus que la valeur

$$\int_{\rho'}^\rho \mathfrak{M}_r(\mu)\, r\, dr.$$

Ainsi les régions voisines de A contribuent à la discontinuité pour une fraction infinitésimale, et U ne peut augmenter brusquement d'une quantité finie que si la surface minima sur laquelle la densité est discontinue s'étend à une distance finie du point A.

On remarque que cette discontinuité peut exister en un point où la densité soit continue. La seule cause de discontinuité possible est l'existence d'une surface minima Σ à la traversée de laquelle μ augmente brusquement d'une quantité μ_1. Le potentiel U augmente alors à la traversée de Σ d'une quantité égale au potentiel dû à une simple couche de densité μ_1 étalée sur Σ. Si le contour de Σ est composé de

plusieurs parties, ou s'il n'a pas sa courbure géodésique moyenne toujours dirigée vers Σ, il existe des points n'appartenant pas à Σ où le potentiel de surface considéré n'est pas nul. Le potentiel de volume est alors discontinu en ces points.

135. Généralisons maintenant la formule de Poisson, relative à la valeur de ΔU en un point A. Nous utiliserons pour y arriver le résultat du n° 22, d'après lequel la moyenne de $U - U_A$ sur une sphère de centre A et de rayon très petit r est équivalente à $\frac{r^2}{2}\Delta U_A$.

Pour calculer cette moyenne, divisons le potentiel en deux termes U' et U'', le premier correspondant aux masses extérieures à la petite sphère, le deuxième aux masses intérieures. Le terme U' étant harmonique à l'intérieur de la sphère de rayon r, la moyenne de $U' - U'_A$ est nulle; il n'y a qu'à tenir compte de $U'' - U''_A$. Or, sur la sphère, $U'' = 0$, ce potentiel étant continu, et nul à l'extérieur; U''_A est d'autre part équivalent à $\mu_A \frac{r^2}{2}$. Il vient donc

$$\Delta U_A + \mu_A = 0, \tag{25}$$

formule qui constitue bien la généralisation de celle de Poisson.

De ces propriétés résulte que le potentiel de volume joue bien, pour la résolution de l'équation de Laplace à second membre, le rôle que nous attendions. Dans un volume limité par une surface dont la courbure moyenne est toujours différente de zéro et dirigée vers l'intérieur, il est nul sur la surface, et le problème de Dirichlet relatif à l'équation de Laplace à second membre est bien résolu par la formule (13). Dans le cas contraire, nous savons que la solution du problème relatif à l'équation sans second membre n'est pas possible en général, et il en est *a fortiori* de même de l'équation à second membre.

136. **Le problème de Neumann.** — Dans l'espace E_n, on sait que la solution du problème de Neumann est analogue à celle du problème de Dirichlet, le rôle que joue le potentiel de double couche dans ce dernier problème étant seulement joué par le potentiel de simple couche. On pourrait s'attendre à ce qu'il en soit de même dans l'espace fonctionnel; il n'en est rien, et la symétrie entre les deux problèmes disparaît. Dans la formule de Green, le potentiel de simple couche

devient négligeable devant le potentiel de double couche, et l'étude directe du potentiel de simple couche nous a montré qu'il n'était pas en réalité distinct du potentiel de double couche.

Dans ces conditions, on peut se demander si le problème de Neumann, comme celui de Dirichlet, peut se résoudre d'une manière plus élémentaire que l'on ne s'y attendrait d'après ce qui a lieu dans l'analyse ordinaire. La réponse semble être affirmative.

Il est probable en effet que les théories relatives à l'équation de Laplace à second membre dans l'espace fonctionnel s'étendent à l'équation analogue relative à une surface non minima de cet espace [1], soit

$$\Delta_S U_M = f|[M]|, \tag{26}$$

M désignant un point quelconque de la surface S. S'il en est ainsi on peut ramener à des calculs de moyenne la détermination de la solution de cette équation prenant une valeur constante sur le contour C de la surface S considérée, si celle-ci est ouverte; le cas de la surface fermée S se traite comme cas limite; il est évidemment nécessaire pour qu'il existe une solution que la fonction $f(M)$ soit presque partout nulle, et dans ce cas U n'est déterminé qu'à une constante près.

Pour la détermination d'une fonctionnelle harmonique à l'intérieur d'une surface fermée S, cela revient au même, d'après la formule (5), de se donner sur la surface les valeurs de $\frac{dU}{dn}$ ou celle de $\Delta_S U$. Il faut que $\frac{dU}{dn}$ soit nul presque partout. D'après les remarques qui précèdent sur l'équation (26), U est déterminé à une constante près sur la surface, et par suite à l'intérieur.

---

[1] Dans le cas des surfaces minima, nous savons que le problème n'est pas distinct du problème analogue dans l'espace.

CHAPITRE VI.

JUSTIFICATION DE LA NOTION DE MOYENNE DANS LE CAS DE LA SPHÈRE. QUESTIONS DIVERSES.

SOMMAIRE : Le cas des fonctionnelles de Gateaux. — Étude d'un autre cas particulier. — Étude d'un cas plus général. — Généralisations du théorème de Gateaux. — La notion d'écart. — Application à la moyenne dans une sphère. — Application au potentiel de double couche. — Questions diverses.

137. Nous avons étudié dans les Chapitres I à IV de la troisième Partie les propriétés de la moyenne dans l'espace fonctionnel, mais nous avons admis l'existence de cette moyenne, en dehors de certains cas où, la fonctionnelle étudiée étant représentée par des séries uniformément convergentes d'intégrales définies, cette moyenne est aisée à calculer, et son existence établie par ce calcul même. Il y aurait lieu de combler cette lacune en généralisant le raisonnement classique par lequel on établit l'existence de l'intégrale définie. Il s'agirait d'arriver au résultat, sans supposer aucune représentation particulière de la fonctionnelle étudiée, en partant uniquement d'hypothèses relatives à son mode de continuité.

Nous allons exposer cette justification dans le cas de la sphère. Commençons par un cas simple.

138. **Le cas des fonctionnelles de Gateaux.** — Une fonctionnelle de Gateaux U, uniformément continue dans une sphère Σ de rayon R ayant l'origine pour centre, est caractérisée par cette propriété que, pour n assez grand, la différence $U_A - U_H$ est inférieure en module, dans toute la sphère, à n'importe quel nombre donné ε, H désignant la projection de A sur le plan de la $n^{\text{ième}}$ section. La fonction qui correspond au point H étant la fonction simple d'ordre n ayant dans chacun des intervalles $\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$ même valeur moyenne que celle qui

correspond au point A, la propriété qui précède n'est pas autre chose en effet que la propriété $\mathcal{G}_1$ du n° 85 de la première Partie, énoncée sous forme géométrique.

Dans le calcul de la moyenne de U dans la sphère Σ, on peut donc remplacer U_A par U_H, en ne risquant de commettre sur la moyenne qu'une erreur au plus égale à ε. La moyenne de U dans la sphère se ramène ainsi à une moyenne dans une sphère Σ_n de l'espace E_n, chaque élément de volume dV_n ayant un poids proportionnel à la fraction de la sphère Σ dont il est la projection.

Soit r la distance au centre de Σ d'un point de l'élément considéré, et $\rho = \sqrt{R^2 - h^2}$. La moyenne dans la $(n+p)^{\text{ième}}$ section de Σ, à une erreur près inférieure à ε, s'écrit

$$\frac{\int_0^R \int_0^R \cdots \int_0^R u(x_1, x_2, \ldots, x_n)\rho^p\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n}{\int_0^R \int_0^R \cdots \int_0^R \rho^p\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n},$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ désignant les coordonnées du point H, et $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la valeur de U en ce point. Lorsque p devient infini, les éléments voisins du centre, où ρ est maximum, deviennent prépondérants pour le calcul de la moyenne, et l'expression précédente tend vers U_0, valeur de U au centre de la sphère. La moyenne de U dans la sphère Σ_{n+p}, pour p assez grand, c'est-à-dire dans la sphère Σ_n, pour n assez grand, est donc comprise entre $U_0 - \varepsilon$ et $U_0 + \varepsilon$. Comme il en est ainsi quelque petit que soit ε, elle tend vers U_0. Donc la moyenne de U dans la sphère Σ existe et est égale à U_0 [1].

Ce résultat est très particulier et n'apprend rien que nous ne sachions déjà; les fonctionnelles de Gateaux étant représentables par des séries uniformément convergentes de polynomes normaux de Gateaux, l'application des formules de Gateaux permet de définir la moyenne, non seulement pour ces fonctionnelles, mais même pour des fonctionnelles beaucoup plus générales. Mais il nous donne une

---

[1] Par un raisonnement tout différent, moins rigoureux, mais plus intuitif, on peut dire : dans l'espace E_n, si une fonctionnelle est linéaire par rapport à chacune des coordonnées, sa valeur au centre d'une sphère est la moyenne de ses valeurs sur la sphère. Ce résultat est vrai à la limite pour les fonctionnelles de Gateaux.

C'est d'ailleurs un cas particulier du théorème analogue pour les fonctionnelles harmoniques.

idée de la manière dont on peut espérer arriver à établir l'existence de la moyenne en partant d'hypothèses relatives au mode de continuité de la fonctionnelle U.

139. Étude d'un autre cas particulier. — Soit $\tau = f(\xi)$ la fonction sommatoire de $x(t)$, c'est-à-dire la mesure de l'ensemble des valeurs de t, comprises entre 0 et 1, pour lesquelles $x \leqq \xi$. Les fonctionnelles U que nous allons considérer sont celles qui ne dépendent que de $f(\xi)$. Elles prennent donc la même valeur pour deux déterminations de $x(t)$ qui se transforment l'une dans l'autre par une substitution effectuée sur la variable t et n'altérant la mesure d'aucun ensemble. Tel est le cas des fonctionnelles représentables par des intégrales définies de la forme

$$\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \mathrm{F}[x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_p)]\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_p,$$

dans lesquelles la fonction intégrée ne dépend pas explicitement de $t_1, t_2, \ldots, t_p$.

Nous supposerons de plus que U soit une fonctionnelle continue de $f(\xi)$. Comme d'ailleurs $f(\xi)$ est essentiellement une fonction non décroissante, cela revient au même de supposer qu'il s'agit de continuité liée au voisinage uniforme ou au voisinage en moyenne.

Pour étudier la moyenne de U dans la sphère Σ, ou, ce qui revient au même, sur sa surface, prenons une fonction $x(t)$ sur sa $n^{\text{ième}}$ section Σ_n. Ce sera une fonction, égale dans chacun des intervalles $\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$, à une valeur constante x_i, et telle que $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = n\mathrm{R}^2$. Chacun des x_i, pour n assez grand, a la loi de Gauss pour loi de probabilité. Il résulte alors de raisonnements connus de calculs de probabilité que, pour n assez grand, la répartition des valeurs x_1, $x_2, \ldots, x_n$ reproduit sensiblement la courbe de Gauss. D'une manière précise, pour n assez grand, la fonction sommatoire $f(\xi)$ diffère de la fonction de Gauss

$$(1) \qquad \varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{\xi^2}{2\mathrm{R}^2}} \frac{d\xi}{\mathrm{R}},$$

dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, de moins de ε, sauf dans une fraction de la sphère Σ_n égale à ε', ε et ε' étant arbitrairement petits.

Par suite U, sauf dans une fraction négligeable de Σ_n, tend vers la valeur obtenue pour $f(\xi) = \varphi(\xi)$, c'est-à-dire en prenant pour $x(t)$ la fonction $\psi(t)$ inverse de $\varphi(\xi)$. La moyenne de U dans la sphère Σ existe donc, et a la valeur $U|[\Psi(t)]|$.

140. Étude d'un cas plus général. — Passons à une catégorie de fonctionnelles très générale, qui comprend les précédentes comme cas particulier. Nous supposerons que, ε *étant arbitrairement petit, on puisse déterminer n de manière que, si $x(t)$ et $y(t)$ sont deux fonctions intérieures à la sphère Σ et ayant même fonction sommatoire dans chacun des intervalles $\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$, on ait certainement*

$$(2) \qquad |U|[y(t)]| - U|[x(t)]|| < \varepsilon.$$

Cette propriété est évidemment beaucoup moins restrictive que la propriété $\mathcal{G}_1$ des fonctionnelles de Gateaux; elle définit donc une catégorie plus étendue de fonctionnelles. Nous l'appellerons *propriété* $\mathcal{H}$ (définie dans la sphère Σ; on peut de même la définir dans un volume quelconque).

Choisissons le nombre n de manière à vérifier l'inégalité (2), et étudions la moyenne de U sur la $(np)^{\text{ième}}$ section Σ_{np} de Σ, p étant très grand. D'après la loi des grands nombres, chacune des moyennes

$$n\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} x^2(t)\,dt = \frac{x_{ip-p+1}^2 + \ldots + x_{ip}^2}{2}$$

est presque égale à R^2, sauf dans une fraction négligeable de Σ_{np}; on peut donc, pour calculer la limite de la moyenne, supposer ces moyennes égales à R^2. De même, d'après le numéro précédent, on ne néglige que n fractions négligeables de Σ_{np}, en supposant que dans chacun des intervalles considérés, la fonction sommatoire de $x(t)$ diffère très peu de $\frac{1}{n}\varphi(\xi)$. L'ensemble des erreurs ainsi commises sur la moyenne est, pour p assez grand, inférieur à ε.

D'autre part, d'après la propriété $\mathcal{H}$, on commet une erreur au plus égale à ε en remplaçant $x(t)$ par une fonction particulière ayant la fonction sommatoire considérée, par exemple la fonction $X_n(t)$ égale, dans chacun des intervalles $\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$, à $\psi(nt - i + 1)$.

Donc, si l'on choisit n, puis p, suffisamment grands, la moyenne de U sur la sphère Σ_{np} diffère de $U|[X_n(t)]|$ d'au plus 2ε; donc la moyenne de U sur la sphère Σ, ou dans cette sphère, existe, et est égale à la limite de $U|[X_n(t)]|$.

141. Généralisations du théorème de Gateaux. — La propriété $\mathcal{G}_1$, qui caractérise les fonctionnelles de Gateaux, est, d'après le théorème de Gateaux, identique à la propriété $\mathcal{G}$, qui indique que ces fonctionnelles peuvent être représentées par des séries uniformément convergentes de polynomes normaux de Gateaux. Par analogie, on peut penser que la propriété $\mathcal{H}$ caractérise les fonctionnelles représentables par une série uniformément convergente de polynomes normaux quelconques.

Avant d'étudier cette question, nous démontrerons un théorème analogue concernant une propriété intermédiaire entre les propriétés $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{H}$.

Nous dirons qu'*une fonctionnelle* $U\,|[x(t)]|$ *possède la propriété* $\mathcal{G}_p$ *dans un domaine fonctionnel* $\mathcal{R}$ *si, étant donné un nombre positif* ε *arbitrairement petit, on peut déterminer* n *de manière que,* $x(t)$ *et* $y(t)$ *étant deux fonctions du domaine* $\mathcal{R}$ *ayant mêmes valeurs moyennes d'ordres* $1, 2, \ldots, p$ *dans chacun des intervalles* $\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$, *on ait certainement*

$$U|[y(t)]| - U|[x(t)]|| < \varepsilon.$$

Les propriétés $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots, \mathcal{G}_p, \ldots, \mathcal{H}$ sont évidemment de moins en moins restrictives.

Nous dirons d'autre part qu'un polynome normal, somme de termes de la forme

$$(3)\qquad \int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_h)x^{\alpha_1}(t_1)x^{\alpha_2}(t_2)\ldots x^{\alpha_h}(t_p)\,dt_1\,dt_2\ldots dt_h$$

est de *classe* p si les exposants α_i sont tous au plus égaux à p.

Nous appellerons *distance de degré* p de deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$, ou des points correspondants de l'espace fonctionnel, le nombre positif r_p défini par la formule

$$r_p^p = \int_0^1 |y(t) - x(t)|^p\,dt.$$

A cette définition correspond la notion de *continuité de degré p* d'une fonctionnelle. Une *sphère généralisée de degré p* sera le lieu des points dont la distance de degré p à un point fixe a une valeur constante.

Ces définitions posées, on a le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonctionnelle U *soit, dans une sphère généralisée de degré p, représentable par une série uniformément convergente de polynomes normaux de classes p et continus de degré p* (¹), *est qu'elle soit continue de degré p dans cette sphère et y possède la propriété* $\mathcal{G}_p$.

La démonstration est analogue à celle du théorème de Gateaux (première Partie, n° 86).

Nous ne recommencerons pas la démonstration du fait que la condition est nécessaire, la démonstration indiquée dans le cas où $p = 1$ s'appliquant sans modification.

Inversement, soit U une fonctionnelle continue de degré p dans la sphère généralisée de degré p

$$(4) \qquad \int_0^1 |x(t)|^p \, dt \leqq R_p^p,$$

et y possédant la propriété $\mathcal{G}_p$. Pour démontrer le théorème, nous allons montrer qu'on peut la représenter avec une erreur au plus égale à ε en valeur absolue par la somme d'un nombre fini de termes de la forme (3).

Dans la sphère considérée, les moyennes $m_{i,q}$, définies par la formule

$$(5) \qquad (m_{i,q})^q = n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} x^q(t)\, dt, \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ q = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix},$$

sont limitées supérieurement. On peut évidemment définir une famille de fonctions $f(t)$ dépendant de np paramètres, telle qu'il existe une fonction et une seule définie par chaque système de valeurs des

(¹) La condition que ces polynomes soient continus de degré p impose aux fonctions $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_h)$ certaines restrictions faciles à préciser. Ainsi, si $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_h = p$, il faut que $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_h)$ soit une fonction mesurable bornée. Pour le cas de $p = 2$, *voir* première Partie, n° 79.

moyennes $m_{i,q}$, et que la distance de degré p de deux fonctions de cette famille tende vers zéro si les moyennes relatives à l'une d'elles tendent respectivement vers les moyennes relatives à l'autre.

Soit alors $x(t)$ une fonction vérifiant l'inégalité (4). Soit $X_n(t)$ la fonction de la famille considérée ayant dans chacun des intervalles $\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$ les mêmes moyennes d'ordre 1, 2, ..., p. Si n est assez grand, on commet sur la fonctionnelle U une erreur au plus égale à $\frac{\varepsilon}{2}$ en remplaçant $x(t)$ par $X_n(t)$ (d'après la propriété $\mathcal{G}_p$). On obtient ainsi une nouvelle fonctionnelle

$$U'_n|[x(t)]| = U|[X_n(t)]|$$

qui est une fonction continue des np moyennes $m_{i,q}$; on peut, avec une nouvelle erreur au plus égale à $\frac{\varepsilon}{2}$, la remplacer par un polynome. En remplaçant dans ce polynome les $m_{i,q}$ par leurs valeurs (5), on obtient une fonctionnelle $U_n|[x(t)]|$, différant de U d'au plus ε, et représentée par une somme de termes de la forme (3).

C. Q. E. D.

En opérant comme nous venons de l'indiquer, on trouve pour $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_h)$ des fonctions discontinues. Par le même procédé que pour le théorème de Gateaux, on peut s'arranger pour avoir des fonctions continues.

142. On peut chercher à étendre les résultats précédents au cas où p devient infini. Désignons symboliquement par x^ω une fonction entière de la forme

$$g(x) = c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_p x^p + \ldots,$$

les coefficients étant tous positifs. Comme dans le cas du degré fini, on définit aisément les notions de *distance de degré* ω, *sphère généralisée de degré* ω, *fonctionnelle continue de degré* ω.

Désignons par $\mathfrak{P}$ le volume intérieur à la sphère généralisé

$$\int_0^1 g[|(xt)|]\,dt = g(\rho),$$

et par $\mathfrak{P}_k$ le volume homothétique du précédent, par rapport à l'origine, dans le rapport $k > 1$. Le théorème suivant paraît *vraisemblable :*

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonctionnelle U *soit représentable par une série de polynomes normaux et continus de degré* ω *dans le volume* $\mathcal{V}$ *qui converge uniformément dans n'importe quel volume* $\mathcal{V}_k$, *est qu'elle soit uniformément continue de degré* ω *et possède la propriété* $\mathcal{H}$ *dans n'importe quel volume* $\mathcal{V}_k$.

Cela revient au même de dire de deux fonctions qu'elles ont même fonction sommatoire dans un intervalle ou qu'elles ont mêmes moyennes de tous ordres, si ces moyennes sont finies, ce qui a lieu nécessairement à l'intérieur du volume $\mathcal{V}$. Cette remarque montre bien l'analogie de la propriété $\mathcal{G}_p$ et de la propriété $\mathcal{H}$, qui est la limite de la précédente pour p infini, et l'analogie de ce théorème et du précédent. Le fait que la condition soit nécessaire se démontre, comme pour le précédent, par la méthode indiquée à propos du théorème de Gateaux.

Pour démontrer qu'elle est suffisante, on peut la supposer vérifiée, et chercher à représenter U par un polynome normal avec une erreur inférieure à un nombre ε arbitrairement petit. On fera à cet effet trois erreurs successives inférieures à $\frac{\varepsilon}{3}$:

1° En remplaçant $x(t)$ par une fonction $X(t)$, ayant même fonction sommatoire dans chacun des intervalles $\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$, et qui soit croissante, ou du moins non décroissante, dans chacun de ces intervalles; si n est assez grand, l'erreur est bien, d'après la propriété $\mathcal{H}$, inférieure à $\frac{\varepsilon}{3}$;

2° En remplaçant $X(t)$ par une autre fonction $Y(t)$, ayant dans chacun des intervalles considérés même moyenne d'ordre $1, 2, \ldots, p$, et dont la forme dépende suivant une loi déterminée de ces np moyennes; si p est assez grand, cela est vraisemblablement possible en commettant sur U une erreur inférieure à $\frac{\varepsilon}{3}$;

3° En remplaçant $U[[Y(t)]]$, qui est une fonction continue de np variables, définie dans un domaine fini, par un polynome. Ce polynome, considéré comme fonctionnelle de $x(t)$, est bien un polynome normal.

La seule difficulté consiste dans la deuxième opération. S'il s'agit

de fonctions quelconques, la connaissance de ses moyennes d'ordres $1, 2, \ldots, p$ dans un intervalle ne donne pas une connaissance très exacte de ces fonctions, et deux fonctions $X(t)$ et $Y(t)$ peuvent avoir même moyenne de tous les ordres sans qu'il soit possible de trouver pour leur distance de degré p une limite supérieure meilleure que la somme de leur distance à l'origine.

Si au contraire il s'agit de fonctions croissantes appartenant au volume $\mathcal{V}$, la connaissance des p premières moyennes les définit assez bien, si p est grand; cela revient à dire qu'une loi de probabilité est bien connue si l'on connaît les valeurs moyennes d'ordres $1, 2, \ldots, p$ de la variable x obéissant à cette loi, et si l'on sait que la valeur moyenne de $g(|x|)$ est inférieure à $g(\rho)$. Dans ces conditions, on peut sans doute montrer, si p est assez grand, et si $X(t)$ et $Y(t)$ appartiennent à un même volume $\mathcal{V}_k$, que la distance de degré p de ces deux fonctions a une limite supérieure η, fonction de k et de p, et tendant vers zéro quand k augmente indéfiniment. En vertu de la continuité uniforme de U, l'erreur sur cette fonctionnelle résultant du remplacement de $X(t)$ par $Y(t)$ peut alors être rendue inférieure à $\frac{\varepsilon}{3}$ en prenant p assez grand.

143. La notion d'écart. — L'idée qui nous a conduit à définir la propriété $\mathcal{G}_p$ est la suivante : la connaissance des p premières moyennes d'une fonction dans un intervalle définit assez bien les valeurs de la fonction, mais sans rien apprendre sur les valeurs correspondantes de la variable. Si l'intervalle considéré est très petit, cette indétermination est sans importance. Aussi, si l'on se donne les moyennes de degré $1, 2, \ldots, p$ dans tous les intervalles $\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$, n et p étant grands, la courbe représentative de la fonction apparaît comme bien connue, en ce sens qu'on en connaît les différents points avec des erreurs qui ne peuvent être très grandes ni sur l'abscisse, ni sur l'ordonnée.

On peut préciser la nature du voisinage entre deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ ayant ainsi mêmes moyennes de degrés $1, 2, \ldots, p$ dans tous les intervalles $\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$, en introduisant une nouvelle définition de la distance, que nous appellerons *écart de degré p*.

Concevons entre les variables t et τ, variant toutes deux entre 0

et 1, une correspondance biunivoque telle que les mesures des ensembles correspondants soient égales. Posons

$$\rho^2 = (t-\tau)^2 + [x(t) - y(\tau)]^2 \qquad (\rho > 0)$$

et

$$e_p^p = \int_0^1 \rho^p \, dt.$$

Nous appellerons *écart de degré p* des fonctions $x(t)$ et $y(t)$, et désignerons par ε_p, le minimum de e_p lorsqu'on fait varier la loi de correspondance entre t et τ [1]. On définirait de même l'écart de degré ω.

Si les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ vérifient l'inégalité (4), on peut, à condition que n soit assez grand, trouver deux fonctions $\xi(t)$ et $\eta(t)$, constantes dans chacun des intervalles $\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$, et dont les distances de degré p à $x(t)$ et $y(t)$ soient aussi petites qu'on veut. On en déduit aisément que, dans la définition de ε_p, on peut se contenter de considérer les correspondances entre t et τ obtenues en divisant l'intervalle $(0, 1)$ en n parties égales, et en permutant ces intervalles partiels. On a ainsi seulement une infinité dénombrable de nombres e_p, dont le minimum est ε_p.

Une des valeurs possibles de e_p, obtenue pour $t = \tau$, est la distance du degré p, r_p, entre les fonctions $x(t)$ et $y(t)$. Il en résulte évidemment que $\varepsilon_p \leqq r_p$. Deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ peuvent donc, au point de vue actuel, apparaître comme plus voisines que si l'on définit

---

(1) Il y a une grande analogie entre cette notion d'écart et l'écart de deux courbes considéré par M. Fréchet. Pour arriver à la définition de M. Fréchet, il faut effectuer à la définition du texte les modifications suivantes :

1° Remplacer e_p, moyenne de degré p de ρ, par le maximum de ρ; il y a entre ces deux points de vue la différence déja signalée entre le voisinage uniforme et le voisinage en moyenne;

2° Supprimer, dans la loi de correspondance entre t et τ, la condition que les ensembles correspondants aient même mesure. Si l'on n'a pas pour objet d'étudier des fonctionnelles représentables par des séries d'intégrales où t est la variable d'intégration, cette condition est sans intérêt;

3° Imposer par contre à cette loi de correspondance d'être continue.

La définition de M. Fréchet est naturelle lorsque l'on considère deux courbes voisines comme deux traits continus tels qu'avec un crayon imparfaitement pointu on ne puisse pas les distinguer. La nôtre est naturelle dans les questions où $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions mesurables, ce qui est le caractère de presque toutes les questions traitées dans le présent Ouvrage.

leur voisinage par la distance r_p. Cela est vrai surtout si, sortant du domaine défini par l'inégalité (4), on peut avoir des distances r_p devenant infinies. Ainsi, la distance r_p, $(p \geqq 1)$ de deux fonctions du type

$$x(t) = \frac{1}{t-a}$$

est infinie, tandis que l'écart e_p de celles qui correspondent à deux valeurs infiniment voisines de a est infiniment petit.

La définition de la continuité d'une fonctionnelle liée à la notion d'écart e_p est donc plus restrictive que celle liée à la distance r_p; mais elle ne l'est pas beaucoup plus. Si, dans une sphère généralisée de degré p, on considère une famille de fonctions $x(t)$ dépendant d'un paramètre a, de manière que la variation de chaque point de la courbe représentative de $x(t)$, quand a varie de δa, puisse se décomposer en une variation δx et une variation δt très petites en moyenne, une fonctionnelle U, définie dans cette sphère, sera en général une fonction continue de a. Il serait même sans doute assez difficile de donner une fonctionnelle continue, avec la définition r_p de la distance, qui ne le soit pas avec la définition ε_q, au moins pour une valeur de q supérieure à p, ou en tout cas avec la définition de l'écart ε_ω. Aussi les fonctionnelles continues avec la définition ε_ω, et une fonction $g(x)$ très rapidement croissante, semblent être *à peu de chose près* les fonctionnelles les plus générales que l'on puisse concevoir, ayant une continuité que l'on puisse mettre en évidence sans faire intervenir les dérivées de $x(t)$.

La restriction, très peu restrictive, ainsi introduite, est cependant suffisante, si la continuité est uniforme, probablement pour permettre la représentation des fonctionnelles considérées par des séries uniformément convergentes, en tout cas la démonstration rigoureuse de l'existence de la moyenne dans une sphère, résultats que nous n'avons pu obtenir avec la définition habituelle de la distance. Pour les démontrer, il suffit de montrer que la définition de la continuité liée à l'écart ε_p entraîne la propriété $\mathcal{H}$.

En effet, deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$, ayant mêmes fonctions sommatoires dans chacun des intervalles $\left(\frac{i-n}{n}, \frac{i}{n}\right)$ peuvent se ramener l'une à l'autre par un changement de variables faisant dans chaque intervalle se correspondre les points où elles ont mêmes valeurs.

On a alors $\rho < \frac{1}{n}$, et par suite ε_p, et même l'écart obtenu en remplaçant e_p par le maximum de ρ, sont au plus égaux à $\frac{1}{n}$. Si donc n est assez grand, et si U est uniformément continue dans son domaine, on a dans ce domaine

$$|U|[y(t)]| - U|[x(t)]|| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire que U possède la propriété $\mathcal{H}$.

144. Application à la moyenne dans une sphère. — Le fait qu'une fonctionnelle soit représentable par une série *uniformément convergente* dans un domaine permet de définir la moyenne de cette fonctionnelle comme somme de la moyenne des différents termes. Si les séries précédentes sont uniformément convergentes à l'intérieur de la sphère Σ, d'équation

$$\int_0^1 x^2(t)\,dt = R^2,$$

ou dans presque tout le volume de cette sphère, on peut donc appliquer les formules de Gateaux relatives à la moyenne dans une sphère, et cela donne une nouvelle démonstration du théorème du n° 140. Nous devons donc comparer à la sphère Σ les volumes dans lesquels nous avons établi la convergence uniforme dans nos séries de polynômes.

Dans la sphère Σ, m_{2p} désignant la moyenne d'ordre $2p$ de la fonction de $x(t)$, m_{2p}^{2p} est presque partout égal à sa valeur moyenne

$$\mu_{2p}^{2p} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p} e^{-\frac{x^2}{2R^2}} \frac{dx}{R} = 1.3\ldots(2p-1)R^{2p},$$

c'est-à-dire que m_{2p} est presque partout égal à sa moyenne

$$\mu_{2p} = R\sqrt[2p]{1.3\ldots(2p-1)}.$$

Si donc on considère une représentation par une série de polynomes normaux de classe $2p$ uniformément convergente dans une sphère généralisée de degré $2p$ et de rayon au moins égal à μ_{2p}, elle est valable, non toute la sphère Σ, mais presque toute cette sphère. La série considérée, qui ne saurait évidemment converger dans toute cette

sphère (si $p > 1$), converge tout de même uniformément dans presque toute cette sphère.

On obtient des résultats analogues pour les moyennes d'ordres impairs, ou pour celles d'ordre ω. En prenant par exemple $g(x) = e^{zx}$, on trouve comme moyenne de l'intégrale

$$\int_0^1 e^{zx(t)}\,dt$$

(c'est-à-dire de la fonction caractéristique de Poincaré) dans la sphère Σ la valeur $e^{\frac{R^2 z^2}{2}}$. Si alors le nombre ρ du n° **142** est au moins égal à $\frac{R^2 z}{2}$, la série obtenue est bien uniformément convergente dans presque toute la sphère Σ.

Tant que la fonction $g(x)$ croît moins rapidement que $e^{\lambda x^2}$, λ étant une constante convenable, la valeur moyenne dans la sphère Σ de

$$\int_0^1 g[|x(t)|]\,dt,$$

c'est-à-dire l'intégrale

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(x)\,e^{-\frac{x^2}{2R^2}}\,\frac{dx}{R},$$

a un sens pour R assez petit, et, si l'on choisit ρ de manière que $g(\rho)$ soit presque au moins égal à cette valeur, le volume $\mathcal{V}$ dans lequel la série qui représente U est uniformément convergente comprend presque toute la sphère Σ à son intérieur; cela suffit pour qu'elle soit applicable au calcul de la moyenne.

Si au contraire $\frac{\log g(x)}{x^2}$ devient infini, il n'existera aucune sphère Σ à l'intérieur de laquelle on puisse affirmer que la série qui représente U dans $\mathcal{V}$ soit presque partout uniformément convergente; il pourra au contraire arriver que cette fonctionnelle soit infinie dans presque toute la sphère Σ, et cela quelque petit que soit le rayon R.

145. Application au potentiel de double couche. — Soit U une fonctionnelle définie sur une surface S et dans son voisinage, et possédant la propriété $\mathcal{H}$. Nous supposerons la surface S fermée et convexe, et ayant une équation de la forme $\Phi = 0$, la fonctionnelle Φ ayant elle-même la propriété $\mathcal{H}$. Nous supposerons de plus qu'on ait, sur la

surface S et dans son voisinage,

$$\Delta_1 \Phi > m^2, \qquad \Delta_1 U < M^2,$$

et que les surfaces $\Phi =$ const. soient convexes. Nous allons montrer que dans ces conditions le potentiel $\mathfrak{M}_A(U)$ dû à des masses de densité U réparties sur S a en chaque point A intérieur à cette surface une valeur bien déterminée, et que c'est une fonctionnelle harmonique du point A. Nous allons pour cela, utilisant les résultats du n° 140, rendre rigoureux les raisonnements du n° 116.

Désignons par P et P′ deux points de la surface S, par Q et Q′ leurs perspectives sur la sphère Σ′ de centre M et de rayon 1, et par P'_1 le point situé sur la demi-droite MP′ et à une distance de M égale à MP; désignons par λ le rapport $\frac{MP}{MQ} = \frac{MP'_1}{MQ'}$, et par $\varphi(t), x(t), x'(t), x'_1(t)$, $y(t), y_1(t)$ les fonctions représentées respectivement par les points M, P, P′, P'_1, Q et Q′. On a

$$x(t) = \varphi(t) + \lambda[y(t) - \varphi(t)],$$
$$x'_1(t) = \varphi(t) + \lambda[y'(t) - \varphi(t)].$$

Supposons les points Q et Q′ choisis de manière que les fonctions correspondantes $y(t)$ et $y'(t)$ aient même fonction sommatoire dans chacun des intervalles $\left(\frac{i-1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, et montrons que, si n est assez grand, $U_P - U_{P'}$ est sûrement inférieur en module à n'importe quel nombre donné ε. Il en résultera bien que $U_P = \varphi(M, Q)$, considéré comme fonctionnelle du point Q, a la propriété $\mathfrak{K}$, et, par suite, d'après le n° 140, que le potentiel de double couche $\mathfrak{M}_M(U)$, moyenne de $\varphi(M, Q)$ sur cette sphère, existe.

Or étant donnée l'hypothèse relative aux fonctions y et y', les fonctions x et x'_1 ont aussi même fonction sommatoire dans chacun des intervalles $\left(\frac{i-1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. On a donc, si n est assez grand,

$$|U_P - U_{P'_1}| \leqq \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |\Phi_{P'_1}| = |\Phi_{P'_1} - \Phi_P| \leqq \varepsilon'.$$

Or, les surfaces $\Phi =$ const. voisines de S étant convexes, et le point M étant dans une certaine région intérieure à ces surfaces, on peut trouver une limite inférieure α de l'angle de MP′ avec ces surfaces. La variation de Φ, pour un déplacement dl sur cette droite,

est donc au moins $m \sin \alpha \, dl$, et est de signe constant, tandis que celle de U est au plus $M \, dl$. Il en résulte que

$$|U_{P'_1} - U_{P'}| \leqq \frac{M}{m \sin \alpha} |\Phi_{P'_1} - \Phi_{P'}| \leqq \frac{\varepsilon}{2},$$

si l'on a pris $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} \frac{m \sin \alpha}{M}$. On a alors

$$|U_{P'} - U_P| \leqq \varepsilon,$$

ce qui entraîne l'existence de la moyenne $M_M(U) = f(M)$.

Si, d'après le n° 140, on précise le nombre n pour lequel la moyenne $f_n(M)$ de $\varphi(M, Q)$ dans la $n^{\text{ième}}$ section de Σ' diffère de $f(M)$ de moins de ε, il est certain qu'on peut le limiter supérieurement dans toute région intérieure à S, l'angle α étant limité inférieurement, et le point M n'intervenant dans les raisonnements que par cet angle [1]. Donc $f_n(M)$ tend uniformément vers $f(M)$, et les raisonnements du n° 140 sont bien rendus rigoureux.

D'ailleurs on peut élargir les hypothèses faites. On sait que la moyenne $f(M)$ ne dépend que des valeurs de U sur certaines parties de la surface; on peut alors supprimer les autres, et le résultat obtenu s'étend ainsi aisément au cas de surfaces ouvertes. On l'étend de même sans peine au cas de surfaces non convexes.

146. Questions diverses. — Nous pensons avoir montré, par ce qui précède et spécialement dans cette dernière Partie, combien l'analyse fonctionnelle est un domaine vaste et méritant encore de nouvelles recherches. Pour terminer, nous allons énumérer un certain nombre de questions, posées dans ce qui précède ou qui se posent naturellement, et non complètement résolues.

1° *Représentation des fonctionnelles continues.* — Les théorèmes de Gateaux, et leur généralisation exposée dans le présent Chapitre, semblent ouvrir le chemin à de nouvelles recherches. Il y a lieu, avant tout, de démontrer le théorème énoncé comme probable au n° 142; s'il n'est pas exact sous la forme indiquée, il suffit certainement d'une légère modification à l'énoncé.

---

[1] Cette remarque, sous une forme moins générale, n'est pas autre chose que la proposition 2° du n° 116.

2° *Justification de la notion de moyenne.* — La question semble maintenant résolue pour la sphère. Mais elle reste entière pour le cas d'un domaine quelconque.

Dans l'espace E_n, S désignant une surface intérieure à la sphère Σ, et Φ désignant la distance à cette surface, la moyenne d'une fonctionnelle U sur cette surface peut se définir par la formule

$$\mathfrak{M}_S(U) = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{\mathfrak{M}_\Sigma(e^{-\lambda\Phi^2} U)}{\mathfrak{M}_\Sigma e^{-\lambda\Phi^2}},$$

$\mathfrak{M}_\Sigma$ désignant la moyenne dans le volume intérieur à la sphère Σ. On pourrait songer à employer une méthode analogue dans l'espace fonctionnel. Mais il y a une difficulté fondamentale, les valeurs de $\mathfrak{M}_\Sigma(U)$ ne dépendent que des valeurs de U sur la surface de la sphère Σ, tandis que $M_S(U)$ dépend effectivement des valeurs de U à l'intérieur de cette sphère. La formule précédente n'est donc pas applicable dans l'espace fonctionnel.

On peut alors prendre les moyennes dans la $n^{\text{ième}}$ section de Σ, et faire augmenter indéfiniment en même temps n et λ. Si λ croît assez rapidement par rapport à n, on aura bien à la limite la moyenne de U dans le volume voisin de S. En écrivant $Ke^{-\lambda\Phi^2}$ au lieu de $e^{-\lambda\Phi^2}$, K désignant la courbure moyenne de la surface S, on aura de même la moyenne de U sur cette surface.

La fonction dont on prend la moyenne variant quand n augmente, on ne peut pas appliquer simplement les formules relatives à la sphère. Bien que l'aspect de la difficulté soit complètement modifié, elle semble rester aussi grande.

3° *Classification des surfaces au point de vue de l'aspect de la notion de moyenne.* — Il serait certainement intéressant de développer et préciser la classification indiquée à la fin du Chapitre IV.

4° *L'ordre normal d'une suite de fonctions orthogonales.* — Une suite de fonctions orthogonales et normales

$$f_1(t), \quad f_2(t), \quad \ldots, \quad f_n(t), \quad \ldots$$

étant rangées dans un ordre normal, nous savons quelles sont les permutations qu'il est possible d'effectuer sans que cet ordre cesse d'être normal. Elles sont caractérisées par cette condition que, c_1,

$c_2, \ldots, c_n, \ldots$ désignant une suite quelconque de nombres inférieurs à 1, la moyenne

$$\lim_{n+\infty} \frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_n}{n}$$

ne change pas par la permutation considérée. Cette condition définit un groupe de substitutions indépendant du choix des fonctions $f_n(t)$.

Par contre, nous avons considéré comme vraisemblable que toute suite complète de fonctions orthogonales admet un ordre normal. Il serait important de démontrer ce théorème.

5° *L'ordre normal d'une suite de fonctions orthogonales et le volume de l'ellipsoïde.* — Nous avons montré les propriétés de l'ordre normal au point de vue du calcul de la moyenne arithmétique. Ainsi, cela revient au même, si une fonctionnelle est définie dans une sphère très petite, de calculer sa moyenne au point de vue de Gateaux, ou la moyenne des valeurs qu'elle prend aux extrémités des axes, rangés dans l'ordre normal.

Nous avons admis une propriété analogue en ce qui concerne le volume de l'ellipsoïde ; le rayon de la sphère équivalente serait la moyenne géométrique des demi-axes rangés dans l'ordre normal.

Il serait intéressant de démontrer ce théorème, ou bien de montrer s'il faut substituer à l'ordre normal un autre ordre, qui ne serait pas non plus parfaitement défini, le groupe de substitutions permettant de passer d'un ordre possible aux autres étant évidemment le même que pour l'ordre normal.

6° *Les fonctionnelles harmoniques sur les surfaces.* — Nous avons vu que la théorie des fonctionnelles harmoniques sur une surface minima était identique à la théorie des fonctionnelles harmoniques dans l'espace. De même, la théorie des fonctionnelles harmoniques sur une surface non minima est identique à la théorie des fonctionnelles harmoniques dans un espace fonctionnel non euclidien. Le développement de cette théorie, et la résolution du problème de Dirichlet correspondant, entraîneraient, comme nous l'avons vu, la résolution du problème de Neumann dans l'espace fonctionnel euclidien.

7° *Équations des types hyperboliques et paraboliques.* — En introduisant, comme argument de la fonctionnelle U, en plus de la fonction $x(t)$ ou un paramètre α, on a des types d'équations parabo-

liques ou hyperboliques telles que

$$\Delta_x U = \Delta_y U,$$
$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial \alpha},$$
$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2}.$$

Cette dernière équation est analogue à l'équation du son. La plupart des théories de l'analyse classique se généralisent sans peine : caractéristiques, propagation des ondes, représentation de la solution par un potentiel sphérique.

Il y a une différence essentielle en ce qui concerne le développement des solutions en séries d'harmoniques. On peut toujours appeler *harmonique*, une solution de la forme $V[[x(t)]]\varphi(\alpha)$, V et φ devant vérifier les équations

$$\Delta V = \lambda V, \qquad \varphi''(\alpha) = \lambda\,\varphi(\alpha).$$

Mais le problème de Dirichlet relatif à cette équation en V se ramène au problème analogue relatif à l'équation de Laplace, et n'introduit pas de solutions fondamentales, correspondant à certaines valeurs de λ. Il ne semble donc pas possible de généraliser les développements en séries d'harmoniques. Si c'est possible, toutes les valeurs de λ jouant le même rôle, c'est une intégrale et non une série qu'il y a lieu de considérer.

8° *Application aux équations intégrales.* — On a vu que le potentiel dû à une double couche de densité égale à l'unité étendue sur une surface fermée S sans point double est nul à l'extérieur et égal à l'unité à l'intérieur. Si la surface S a des points doubles, la valeur du potentiel en chaque point est un entier, indiquant combien de fois la surface S entoure ce point.

Considérons alors une transformation ponctuelle, faisant correspondre à un point M, représentant une fonction $x(t)$, un point P représentant une fonction $y(t)$; par exemple $y(t)$ pourra être un polynome normal en $x(t)$, dont la forme dépend de t, c'est-à-dire une somme de termes de la forme

$$\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \varphi(t, t_1, t_2, \ldots, t_h) x^{\alpha_1}(t_1) x^{\alpha_2}(t_2) \ldots x^{\alpha_h}(t_h)\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_h.$$

Soit à chercher pour combien de points M, intérieurs à une surface Σ, le point P occupe une position donnée A. Quand M décrit la surface Σ, P décrit une surface fermée S, et le nombre cherché est égal à la valeur en A du potentiel dû à une double couche de densité unité étalée sur la surface S.

Ce potentiel se ramène à une moyenne, sur une sphère S′ de centre A, d'une fonction égale en chaque point Q au nombre de points P de S dont Q est la perspective, chacun d'eux étant compté pour $+1$ ou pour -1 suivant que la normale intérieure à S en ce point fait avec la direction PA un angle aigu ou obtus. On serait donc ramené à une moyenne sur une sphère, si l'on savait déterminer l'intersection de la demi-droite AQ avec la surface S; mais cela constitue un problème exactement aussi difficile que le problème proposé.

Dans l'espace Σ_n, on échappe à cette difficulté par un changement de variables, ramenant l'intégrale relative à la surface S′ à une intégrale relative à la surface Σ. Dans l'espace fonctionnel, on ne peut avoir recours à ce procédé. Le rapport des éléments d'aires correspondants n'est pas une quantité finie, mais une quantité de la forme $k^{\omega-1}$, avec les notations du Chapitre IV, de sorte que l'intégrale considérée ne se ramène pas à la moyenne d'une fonctionnelle bien définie sur la surface Σ. Aussi, même dans le cas simple où la surface Σ est une sphère, et où la moyenne d'une fonctionnelle définie sur Σ peut, en général, se calculer par les formules de Gateaux, la solution théorique qui précède ne semble pas aisément permettre un calcul effectif. Peut-être les remarques qui précèdent serviront-elles tout de même à obtenir la solution du problème.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

LES FONDEMENTS DU CALCUL FONCTIONNEL.

Chapitres. Pages.

I. — L'origine et les principes du calcul fonctionnel..... 1

II. — La notion de continuité dans le domaine fonctionnel..... 11

III. — Fonctions sommables et fonctions à variation bornée..... 23

IV. — Variation première et fonctionnelles linéaires..... 48

V. — Variation seconde et fonctionnelles du second degré..... 77

VI. — Fonctionnelles de degrés quelconques..... 100

VII. — Considérations géométriques. Notions sur les séries de fonctions orthogonales..... 116

VIII. — Transformations ponctuelles dans l'espace fonctionnel..... 130

DEUXIÈME PARTIE.

LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE.

I. — Les équations aux dérivées fonctionnelles généralisant les équations aux différentielles totales..... 151

II. — L'équation aux dérivées fonctionnelles de la fonction de Green..... 171

III. — Transformations et applications de l'équation aux dérivées fonctionnelles de la fonction de Green..... 192

IV. — Les équations aux dérivées fonctionnelles partielles..... 210

V. — L'extension des équations de Jacobi Hamilton..... 233

VI. — Types divers d'équations aux dérivées fonctionnelles et de systèmes d'équations..... 242

TROISIÈME PARTIE.

LA NOTION DE MOYENNE DANS LE DOMAINE FONCTIONNEL ET L'ÉQUATION DE LAPLACE GÉNÉRALISÉE.

I. — La sphère dans l'espace à n dimensions..... 261

II. — La notion de valeur moyenne dans l'espace fonctionnel..... 274

Chapitres. Pages.

III. — De l'emploi d'une infinité dénombrable de coordonnées dans l'espace fonctionnel..... 293

IV. — La mesure des volumes et des surfaces et la géométrie des surfaces dans l'espace fonctionnel. Applications à la notion de moyenne..... 314

V. — Les fonctionnelles harmoniques..... 375

VI. — Justification de la notion de moyenne dans le cas de la sphère. Questions diverses..... 421

65492 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS ET Cie, quai des Grands-Augustins, 55.